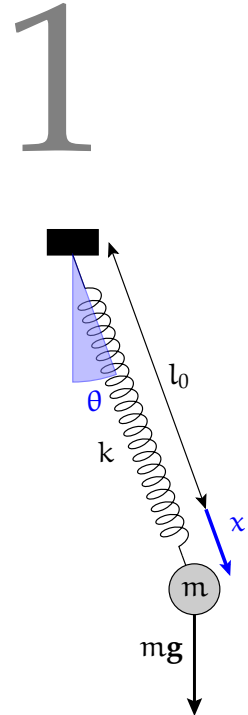


1.1 FEDERPENDEL IN 2D

Gegeben sei das rechts abgebildete Federpendel, dessen oberes Ende fixiert ist und welches sich in zwei Raumdimensionen (Papierebene) bewegen kann. Die masselose Feder habe die Federkonstante k und in entspanntem Zustand (ohne äußere Kräfte) die Länge l_0 . Am unteren Ende der Feder sei eine Punktmasse mit der Masse m befestigt. Die Bewegung des Pendels unter dem Einfluss der Gravitation wird mit den Koordinaten θ (Winkel) und x (Pendellänge minus l_0) beschrieben.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf.
- Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen an und bestimmen Sie die Ruhelage (x_0, θ_0) des Pendels. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.
- Ist es möglich, dass $\theta(t) = \theta_0$ bleibt und nur eine Bewegung in x stattfindet? Ist es möglich, dass $x(t) = x_0$ bleibt und nur eine Bewegung in θ stattfindet?
- Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, $(x, \theta) = (x_0 + \delta x, \theta_0 + \delta \theta)$ und stellen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen für δx und $\delta \theta$ auf. Entwickeln Sie dafür in den Bewegungsgleichungen alle auftretenden Funktionen bis zur linearen Ordnung in δq bzw. $\delta \dot{q}$ (für $q = x, \theta$) und vernachlässigen Sie alle Terme, die mehr als einen Faktor δq oder $\delta \dot{q}$ enthalten. Welche Art von Bewegungsgleichungen ergeben sich? Gibt es in linearer Ordnung eine Kopplung der Freiheitsgrade x und θ ?



Lösung:

- Man bezeichne die Koordinaten in der Papierebene als $\vec{r} = (z, y)$, wobei der Ursprung dieses Koordinatensystems im Aufhängepunkt des Pendels sein soll. Dann gilt

$$z = (l_0 + x) \sin \theta, \quad (1.1)$$

$$y = -(l_0 + x) \cos \theta. \quad (1.2)$$

Da die kinetische Energie von $\dot{\vec{r}}$ abhängt, werden auch die Ableitungen benötigt:

$$\dot{z} = \dot{x} \sin \theta + (l_0 + x) \dot{\theta} \cos \theta, \quad (1.3)$$

$$\dot{y} = -\dot{x} \cos \theta + (l_0 + x) \dot{\theta} \sin \theta. \quad (1.4)$$

Einsetzen in die kinetische Energie gibt

$$T = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m(\dot{z}^2 + \dot{y}^2)}{2} = \frac{m(\dot{x}^2 + (l_0 + x)^2 \dot{\theta}^2)}{2}. \quad (1.5)$$

Um den letzten Ausdruck zu erhalten, wurde der Satz des Pythagoras für Winkelfunktionen verwendet.

Die potentielle Energie setzt sich zusammen aus dem homogenen Gravitationspotential und dem quadratischen Oszillatorpotential:

$$V = mgy + \frac{1}{2}kx^2 = -mg(l_0 + x) \cos \theta + \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.6)$$

Die Lagrangefunktion ist somit

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + (l_0 + x)^2 \dot{\theta}^2)}{2} + mg(l_0 + x) \cos \theta - \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.7)$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung der x -Koordinate lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m(l_0 + x)^2 \dot{\theta}^2}{2} + mg(l_0 + x) \cos \theta - \frac{1}{2}kx^2 \right) \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = m(l_0 + x)\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - kx} \quad (1.10)$$

und für die θ -Koordinate

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{\theta}(l_0 + x)^2) = -mg(l_0 + x) \sin \theta \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\theta}(l_0 + x)^2 + 2m\dot{\theta}(l_0 + x)\dot{x} = -mg(l_0 + x) \sin \theta \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}(l_0 + x) + 2\dot{\theta}\dot{x} = -g \sin \theta} \quad (1.14)$$

In der Ruhelage gilt $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ wodurch sich die Bewegungsgleichungen (1.10) und (1.14) zu

$$0 = mg \cos \theta - kx, \quad (1.15)$$

$$0 = -g \sin \theta \quad (1.16)$$

ergeben. Aus (1.16) folgt, dass die Ruhelage durch $\theta = 0$ gegeben ist. Einsetzen in (1.15) liefert die Auslenkung der Feder in der Ruhelage mit $x = mg/k$. Das Ergebnis für θ ist physikalisch anschaulich klar. Ebenso ist es plausibel, dass $x = mg/k$ in der Ruhelage gilt, da dies eine positive Größe ist, welche mit der Masse bzw. Erdbeschleunigung wächst und mit der Federkonstante sinkt. Streng genommen gibt es noch eine zweite Ruhelage bei $\theta = \pi$ und $x = -mg/k$, diese ist jedoch instabil.

c) Der Fall, dass $\theta = \text{const}$ und nur eine Bewegung der x -Koordinate stattfindet, ist möglich. Dazu muss laut Gleichung (1.14) $\dot{\theta} = 0$ gelten und x muss dann laut (1.10) eine Schwingungsgleichung $m\ddot{x} = mg - kx$ erfüllen.

Falls eine Lösung des gekoppelten DGL-Systems mit $x = \text{const}$ existieren sollte, so gilt für die erste Ableitung von θ laut (1.10) Folgendes:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{-mg \cos \theta + kx}{m(l_0 + x)}}. \quad (1.17)$$

Die zweite Ableitung muss daher

$$\ddot{\theta} = \pm \frac{\dot{\theta} g \sin \theta}{2(l_0 + x)} \sqrt{\frac{m(l_0 + x)}{-mg \cos \theta + kx}} \quad (1.18)$$

sein. Laut (1.14) muss allerdings

$$\frac{\ddot{\theta}(l_0 + x)}{-g \sin \theta} = 1 \quad (1.19)$$

erfüllen. Einsetzen von (1.18) in (1.19) liefert

$$\mp \frac{\dot{\theta}}{2} \sqrt{\frac{m(l_0 + x)}{-mg \cos \theta + kx}} = 1 \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \mp 2 \sqrt{\frac{-mg \cos \theta + kx}{m(l_0 + x)}}. \quad (1.21)$$

Der Vergleich von (1.21) mit (1.17) sagt schließlich, dass für den Fall $x = \text{const}$ ebenfalls θ konstant sein muss:

$$\dot{\theta} = \mp 2\dot{\theta} \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0. \quad (1.23)$$

Das bedeutet, eine Bewegung mit konstantem x aber zeitabhängigem θ ist nicht möglich.

- d) Mit den Entwicklungen, welche sich aus den trigonometrischen Additionstheoremen und der Kleinwinkelnäherung ergeben,

$$x \approx x_0 + \delta x, \quad (1.24)$$

$$\theta \approx \theta_0 + \delta \theta, \quad (1.25)$$

$$\sin \theta \approx \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \delta \theta, \quad (1.26)$$

$$\cos \theta \approx \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \delta \theta, \quad (1.27)$$

soll nun in (1.10) und (1.14) eingegangen werden. Dann ergibt sich

$$m\delta\ddot{x} = mg \cos \theta_0 - kx_0 - mg \sin \theta_0 \delta \theta - k\delta x, \quad (1.28)$$

$$(l_0 + x_0)\delta\ddot{\theta} = -g \sin \theta_0 - g \cos \theta_0 \delta \theta. \quad (1.29)$$

Nun können noch die Werte in der Ruhelage eingesetzt werden und man erhält

$$m\delta\ddot{x} = -k\delta x, \quad (1.30)$$

$$(l_0 + mg/k)\delta\ddot{\theta} = -g\delta\theta. \quad (1.31)$$

Dies sind zwei entkoppelte Schwingungsgleichungen.

1.2 ZWANGSBEDINGUNGEN IM PRATER

Der Wiener Wurstelprater eignet sich hervorragend, um alle möglichen Zwangsbedingungen am eigenen Leib zu erfahren. Klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen (holonom oder nicht-holonom, skleronom oder rheonom), denen Sie in den folgenden Fahrgeschäften ausgesetzt sind:

- Autodrom: autonome Bewegung in einem Fahrzeug innerhalb einer räumlich begrenzten Fahrfläche.
- Tornado: Bewegung in einer frei rotierenden „Schaukel“, die am Ende einer rotierenden Stange aufgehängt ist.
- Klassische Achterbahn: Bewegung entlang einer Achterbahnstrecke.
- Tagada: Bewegung auf einem rotierenden, großen Teller, mit Aufstehen und Springen.



Lösung:

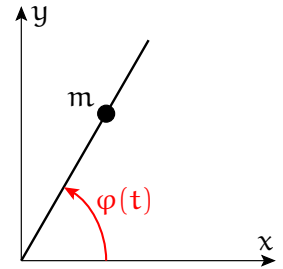
- **Autodrom:** Bedenken wir zuerst, dass die Fahrzeuge sich durchgehend am Boden befinden. Die Dimension unseres Konfigurationsraumes ist im Gegensatz zu unseren drei Raumdimensionen somit $\dim \mathbb{Q} = 2 \rightarrow \text{holonom}$. Unter Vernachlässigung jeglicher Bewegungen der Erde ändert der Boden sich zeitlich nicht $\rightarrow \text{skleronom}$.

Auch die Begrenzung der Fahrfläche muss durch eine oder mehrere zusätzliche Zwangsbedingungen ausgedrückt werden. Die Bewegung der Fahrzeuge wird dabei auf einen bestimmten Bereich eingegrenzt $\rightarrow \text{nicht-holonom}$. Normalerweise bleibt die Begrenzung zeitlich konstant $\rightarrow \text{skleronom}$.

- **Tornado:** Die Bewegung der frei rotierenden Schaukel ist auf eine Kugeloberfläche beschränkt $\rightarrow \text{holonom}$. Der Mittelpunkt dieser Kugel bewegt sich entsprechend der rotierenden Stange $\rightarrow \text{rheonom}$.
- **Achterbahn:** Eine klassische Achterbahn bewegt sich entlang der vorgegebenen Kurve im \mathbb{R}^3 . Die Kurve ist ein eindimensionales Objekt, was uns auf $\dim \mathbb{Q} = 1$ schließen lässt. Somit müssen zwei *holonome* Zwangsbedingungen vorliegen. Diese sind beide *skleronom*, da sich die Strecke der Achterbahn normalerweise nicht zeitlich ändert.
- **Tagada:** Das Aufstehen, Bewegen und Springen auf dem Gefährt ermöglicht die Bewegung in drei Raumdimensionen. Daraus lässt sich folgern, dass jede vorliegende Zwangsbedingung *nicht-holonom* sein muss. Man ist sowohl durch den Boden, als auch seitlich durch die Reling auf einen bestimmten Bereich im Raum beschränkt. Da der Teller allerdings immer in Bewegung ist, muss es sich um *rheonome* Zwangsbedingungen halten.

1.3 PERLE AUF ROTIERENDEM STAB

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei auf einem halb-unendlichen Stab bewegen, dessen Ende im Ursprung verankert ist. Der Stab dreht sich in der xy -Ebene gemäß einer vorgegebenen Funktion $\varphi(t)$, siehe Abbildung.



- Welche Art von Zwangsbedingung liegt vor? Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten, stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\varphi(t) = \omega t$, $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ und $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (-\omega x_0, \omega x_0)$. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Lösung:

- Da die Perle sich nur entlang einer Geraden bewegen kann, ist die Dimension des Konfigurationsraumes $\dim(\mathbb{Q}) = 1$. Es muss also eine holonome Zwangsbedingung vorliegen, die die Dimensionalität unseres Systems um eins verringert. Diese ist rheonom, weil die Drehung des Stabes und somit die Ausrichtung der Gerade zeitabhängig ist. Außerdem liegt zusätzlich eine nicht-holonome Zwangsbedingung vor, welche die Perle am Durchqueren des Ursprungs hindert. Diese werden wir erst nach dem Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichung berücksichtigen, indem wir den Definitionsbereich der Lösungen einschränken.

Als generalisierte Koordinaten bieten sich hier Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi(t)) \\ r \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

an, wobei der Polarwinkel durch die Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben ist. Die generalisierte Koordinate unseres Systems ist somit der Abstand der Perle zum Ursprung, $r(t)$. Mit (1.32) kann die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten dargestellt werden:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.33)$$

$$= \frac{m}{2} \left[\left(\dot{r} \cos \varphi(t) - r \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \right)^2 \right. \quad (1.34)$$

$$\left. + \left(\dot{r} \sin \varphi(t) + r \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \right)^2 \right] \quad (1.35)$$

$$= \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2(t)] , \quad (1.36)$$

$$V = 0 \quad (1.37)$$

$$\Rightarrow \boxed{L(r, \dot{r}, t) = T - V = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2(t)]} \quad (1.38)$$

Die Bewegungsgleichung für $r(t)$ kann aus der Lösung der Euler-Lagrange Gleichung gewonnen werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\varphi}^2(t) = 0 \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2(t) = 0} \quad (1.41)$$

Hier sollten wir uns an die zweite Zwangsbedingung erinnern. Beim Lösen der Differentialgleichung muss 'manuell' darauf geachtet werden, dass $\forall t: r(t) \geq 0$ gelten muss, damit die Perle den Stab nicht verlässt. Nur so beschreibt (1.39) tatsächlich unser System.

b) *Anmerkung:* In diesem Unterpunkt wird davon ausgegangen, dass $\omega > 0$ ist.

Für eine gleichmäßige Drehung des Stabes, $\varphi(t) = \omega t$, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \omega$, nimmt die Bewegungsgleichung folgende Form an:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0. \quad (1.42)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann etwa durch einen Exponentialansatz $r \propto e^{\lambda t}$ gefunden werden und ist ganz allgemein durch

$$r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} \quad (1.43)$$

gegeben. Die Konstanten A und B werden von den Anfangsbedingungen festgelegt. In kartesischen Koordinaten lautet die Bewegung der Perle also ganz allgemein

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Ein Vergleich mit den gegebenen Anfangsbedingungen liefert ein Gleichungssystem, aus dessen Lösung sich die Konstanten A und B bestimmen lassen:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(A - B) \\ \omega(A + B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega x_0 \\ \omega x_0 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = x_0, \\ A - B = -x_0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Daraus folgt $A = 0$ und $B = x_0$. Die Lösung unseres Problems ist somit

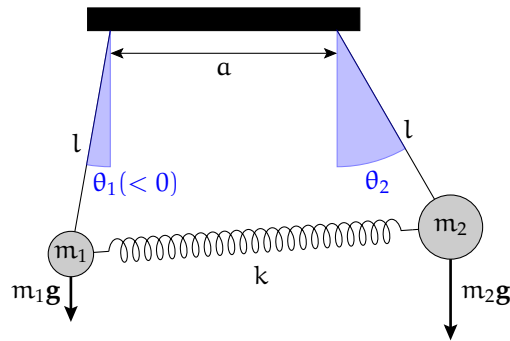
$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 e^{-\omega t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}} \quad (1.48)$$

Versuchen wir nun, unsere Ergebnisse zu verstehen und interpretieren. Begeben wir uns dazu ins Ruhesystem des Stabes und überlegen,

was passiert, wenn die Perle zu Beginn ruht. Ist $\dot{r}(0) = \omega(A - B) = 0$, ergibt sich $r(t) = r_0 \cosh(\omega t)$. Die Perle wird also nach außen hin beschleunigt. Da keine äußeren Kräfte wirken, muss hier eine Scheinkraft am Werk sein. Diese kann (im Ruhesystem des Stabes) beobachtet werden, da dieses Bezugssystem rotiert, also beschleunigt ist. Hat die Perle eine (nicht allzu hohe) Anfangsgeschwindigkeit in Richtung Ursprung, bewegt sie sich anfangs in Richtung Ursprung, wird dabei abgebremst, kommt irgendwann zum Stillstand, dreht ihre Bewegungsrichtung um und wird schlussendlich wieder ins Unendliche beschleunigt. In unserem Fall nimmt laut (1.48) der Abstand zum Ursprung jedoch durchgehend ab. Das entspricht jenem Szenario, bei welchem die Anfangsgeschwindigkeit genau so groß ist, dass die Perle für immer größere Zeiten dem Ursprung beliebig nahe kommt, diesen in endlicher Zeit aber nie erreicht.

1.4 GEKOPPELTE PENDEL

Wir betrachten das hier abgebildete System:



Die oberen Enden zweier masseloser Stäbe der Länge l sind im Abstand a drehbar befestigt. An den unteren Enden befindet sich je eine Punktmasse, links m_1 und rechts m_2 . Diese Punktmassen sind durch eine masselose Feder miteinander verbunden, die eine Federkonstante k und in entspanntem Zustand (ohne äußere Kräfte) die Länge a hat. Die Punktmassen stehen zusätzlich unter dem Einfluss der Schwerkraft und können sich nur in zwei Raumdimensionen (Papierebene) bewegen. Die Dynamik des Systems wird mit den beiden Winkeln θ_1 und θ_2 (siehe Abbildung) beschrieben.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf. Beachten Sie, dass sie auch für große Winkel θ_i gültig sein soll. Etwaige Kollisionen zwischen den Objekten können Sie jedoch ignorieren (indem Sie z.B. $a > 2l$ und $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$ annehmen).
- Für den Fall kleiner Auslenkungen $|\theta_i| \ll 1$ führen wir neue Koordinaten $x_i := l \cdot \theta_i$ ein. Was bedeuten diese Koordinaten physikalisch? Entwickeln Sie die Lagrangefunktion bis zur quadratischen Ordnung in diesen Koordinaten bzw. ihren zeitlichen Ableitungen.

Lösung:

- Die Summe der kinetischen Energien der Pendel kann in Abhängigkeit von den Ableitungen der generalisierten Koordinaten θ_1 und θ_2 direkt angeschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2. \quad (1.49)$$

Die potentielle Energie des Systems ergibt sich aus der Summe der potentiellen Energien der Punktmassen aufgrund des homogenen Schwerfelds und der potentiellen Energie der Feder:

$$V = -m_1 g l \cos \theta_1 - m_2 g l \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k (\Delta d(\theta_1, \theta_2))^2. \quad (1.50)$$

Die Federenergie hängt hier von der Federkonstante k und dem Quadrat der Auslenkung bzw. Stauchung $\Delta d(\theta_1, \theta_2)$ der Feder bezüglich der Ruhelage ab. Δd kann als die Distanz der zwei Punktmassen

abzüglich der Länger der Feder in Ruhelage aufgefasst werden. Diese Länge lässt sich geometrisch finden und lautet

$$\Delta d(\theta_1, \theta_2) = \quad (1.51)$$

$$= \sqrt{(l \sin \theta_2 + a - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2} - a. \quad (1.52)$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich letztendlich durch

$$L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) - V(\theta_1, \theta_2). \quad (1.53)$$

- b) Für kleine Auslenkungen beider Pendel können die Taylorentwicklungen der Winkelfunktionen sowie später die Entwicklung der Quadratwurzel verwendet werden:

$$\sin(\theta_i) = \theta_i - \frac{\theta_i^3}{3!} + \mathcal{O}(\theta_i^5), \quad (1.54)$$

$$\cos(\theta_i) = 1 - \frac{\theta_i^2}{2!} + \frac{\theta_i^4}{4!} + \mathcal{O}(\theta_i^6), \quad (1.55)$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + \mathcal{O}(y^2). \quad (1.56)$$

Neue Koordinaten $x_i := l \cdot \theta_i$ sollen verwendet werden, welche die Pendelauslenkungen als Kreisbogenlangen darstellen. Unter Verwendung der Entwicklungen sowie der Koordinatentransformation ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \quad (1.57)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 g l \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + m_2 g l \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} k (\Delta d(\theta_1, \theta_2))^2 + \mathcal{O}(\theta_i^3) \\ & = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + m_1 g l \left(1 - \frac{x_1^2}{2l^2}\right) + m_2 g l \left(1 - \frac{x_2^2}{2l^2}\right) \quad (1.59) \\ & - \frac{1}{2} k (\Delta d(x_1, x_2))^2 + \mathcal{O}(x_i^3), \end{aligned}$$

wobei gilt

$$\Delta d(x_1, x_2) = \sqrt{(a + l\theta_2 - l\theta_1 + \mathcal{O}(\theta_i^3))^2 + (l - l + \mathcal{O}(\theta_i^2))^2} - a \quad (1.60)$$

$$= \sqrt{(a + x_2 - x_1 + \mathcal{O}(x_i^3))^2 + \mathcal{O}(x_i^4)} - a \quad (1.61)$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a(x_2 - x_1) + \mathcal{O}(x_i^2)} - a \quad (1.62)$$

$$= a \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{a} + \mathcal{O}(x_i^2)} - a \quad (1.63)$$

$$= a \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{a} + \mathcal{O}(x_i^2)\right) - a \quad (1.64)$$

$$= x_2 - x_1 + \mathcal{O}(x_i^2). \quad (1.65)$$

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):

1.1 *ab* / 1.1 *c* / 1.1 *d* / 1.2 / 1.3 *a* / 1.3 *b* / 1.4 *a* / 1.4 *b*