

3

3.1 TEILCHEN IM ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung Q im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{q}, t))^2 + Q\Phi(\mathbf{q}, t). \quad (3.1)$$

Dabei sind $\Phi(\mathbf{q}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ das skalare Potential bzw. das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes am Aufenthaltsort \mathbf{q} des Teilchens zum Zeitpunkt t . Das elektrische und das magnetische Feld ergeben sich aus den Potentialen gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{q}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{q}, t). \quad (3.3)$$

Dabei steht ∇ für $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$.

- Verwenden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, um einen Zusammenhang zwischen dem kanonischen Impuls \mathbf{p} und dem mechanischen Impuls $m\dot{\mathbf{q}}$ herzustellen.
- Wie hängen $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ zusammen?
- Zeigen Sie, dass $\mathbf{e}_i v_j \partial_i A_j = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$. Im Ausdruck auf der linken Seite wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. es wird über alle doppelt auftretenden Indizes von 1 bis 3 summiert. Dabei bezeichnet \mathbf{e}_i den i -ten Einheitsvektor, sodass z.B. $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$. \mathbf{v} sei ein beliebiger Vektor, \mathbf{A} ist das Vektorpotential und ∂_i steht abkürzend für $\frac{\partial}{\partial q_i}$.
Tipp: Beginnen Sie die Rechnung bei dem doppelten Kreuzprodukt. Verwenden Sie für das Kreuzprodukt das Levi-Civita-Symbol.
- Leiten Sie aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen die Lorentzkraft $m\ddot{\mathbf{q}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B})$ her.
Tipp: Greifen Sie im Zweifelsfall auf die Indexschreibweise und die Einsteinsche Summenkonvention zurück. Verwenden Sie alle Resultate der vorhergehenden Unterpunkte $a-c$.



Hendrik Lorentz

Lösung:

- Zu Beginn schreibt man am besten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.4)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.5)$$

Nun ist der Zusammenhang zwischen $m\dot{q}_i$ und p_i gefragt. Die Größe $m\dot{q}_i$ kommt explizit nur in (3.4) vor, weshalb diese Gleichung benutzt wird und die andere zunächst nicht betrachtet werden muss.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{1}{2m} (p_j p_j - 2Q p_j A_j) \right] = \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{2m} (2\delta_{ij} p_j - 2Q \delta_{ij} A_j) = \frac{1}{2m} (2p_i - 2Q A_i) \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow m\dot{q}_i = p_i - Q A_i. \quad (3.8)$$

b) Für eine Funktion $A_i(q_j, t)$ gilt gemäß der Kettenregel:

$$\frac{dA_i}{dt} = \dot{q}_j \partial_j A_i + \frac{\partial A_i}{\partial t}. \quad (3.9)$$

c) Für die folgende Herleitung wird Gebrauch von der Grassmann-Identität und der Antisymmetrie der Levi-Civita-Symbole gemacht.

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \quad (3.10)$$

$$= (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A})_k \mathbf{e}_k = \quad (3.11)$$

$$= [\epsilon_{ijk} v_i (\nabla \times \mathbf{A})_j + v_i \partial_i A_k] \mathbf{e}_k = \quad (3.12)$$

$$= [\epsilon_{ijk} v_i \epsilon_{mnl} \partial_m A_n + v_i \partial_i A_k] \mathbf{e}_k = \quad (3.13)$$

$$= [-\epsilon_{jik} \epsilon_{jmn} v_i \partial_m A_n + v_i \partial_i A_k] \mathbf{e}_k = \quad (3.14)$$

$$= [(\delta_{in} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kn}) v_i \partial_m A_n + v_i \partial_i A_k] \mathbf{e}_k = \quad (3.15)$$

$$= [v_i \partial_k A_i - v_i \partial_i A_k + v_i \partial_i A_k] \mathbf{e}_k = \quad (3.16)$$

$$= v_i \partial_k A_i \mathbf{e}_k. \quad (3.17)$$

d) Wie die Angabe suggeriert, wird man nun auch die zweite Hamiltongleichung (3.5) benötigen:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \partial_i \left[\frac{1}{2m} (Q^2 A_j A_j - 2Q p_j A_j) + Q\Phi \right] = \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2m} (2Q^2 A_j \partial_i A_j - 2Q p_j \partial_i A_j) + Q \partial_i \Phi = \quad (3.19)$$

$$= Q \frac{Q A_j - p_j}{m} \partial_i A_j + Q \partial_i \Phi \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i = Q \dot{q}_j \partial_i A_j - Q \partial_i \Phi. \quad (3.21)$$

Als Resultat möchte man einen Ausdruck, der \ddot{q}_i beinhaltet, aber keine generalisierten Impulse. Die Strategie könnte nun also sein, dass man (3.8) einmal ableitet und das auftretende \dot{p}_i dann durch (3.21) ersetzt:

$$m\ddot{q}_i = \dot{p}_i - Q \frac{dA_i}{dt}. \quad (3.22)$$

Für die totale Ableitung von A_i benutzt man (3.9) und erhält

$$m\ddot{q}_i = Q \dot{q}_j \partial_i A_j - Q \partial_i \Phi - Q \left(\dot{q}_j \partial_j A_i + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right). \quad (3.23)$$

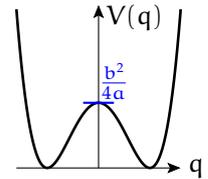
Nun wird der erste Term mittels (3.17) umgeschrieben:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{q}}_i &= Q(\dot{\mathbf{q}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla) \mathbf{A})_i \\ &\quad + \left[-Q\nabla\Phi - Q \left((\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right]_i \\ &= Q(\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})_i. \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.2 PHASENRAUMSTRUKTUR

Gegeben sei eine Punktmasse mit der Masse m im eindimensionalen Doppelmuldenpotential (siehe Abbildung rechts)

$$V(q) = aq^4 - bq^2 + \frac{b^2}{4a}, \quad (3.25)$$



wobei $a, b > 0$.

- Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Potentials. Sind diese jeweils stabil oder nicht?
- Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion direkt über die Energie und berechnen Sie daraus das Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q, p)$.
- Erstellen Sie ein charakteristisches Phasenraumportrait. Skizzieren Sie dafür mehrere qualitativ unterschiedliche Phasenraumtrajektorien. Betrachten Sie dazu auf jeden Fall mindestens eine Trajektorie, die mit einer Energie $E < b^2/(4a)$ assoziiert ist und mindestens eine mit $E > b^2/(4a)$.
- Wie sieht der Phasenraum um die in Punkt a) bestimmte labile Gleichgewichtslage aus? Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorie, die mit der Energie $E = b^2/(4a)$ assoziiert ist und diskutieren Sie ihre physikalische Bedeutung.
- Entwickeln Sie das Potential bis zur quadratischen Ordnung um das in Punkt a) bestimmte rechte Minimum. Wie sieht das Phasenraumportrait in der unmittelbaren Umgebung dieses Minimums aus? Gibt es einen qualitativen Unterschied zum linken Minimum?

Lösung:

- Die Gleichgewichtslagen eines Potential entsprechen den Extremalstellen mit $V'(q) = 0$. Dies kann also auch als Punkte interpretiert werden, an welchen keine Kraft wirkt. Für unser Potential ergibt sich:

$$V'(q) = 4aq^3 - 2bq \quad (3.26)$$

$$= (4aq^2 - 2b)q = 0. \quad (3.27)$$

Die erste Ruhelage ist somit $q_1 = 0$. Die Krümmung des Potentials,

$$V''(q) = 12aq^2 - 2b, \quad (3.28)$$

ist an dieser Stelle negativ. Es handelt sich also um ein Maximum, nämlich den Gipfel des "Hügels" in der Mitte des Potentials. Diese Ruhelage ist somit instabil. Die anderen Ruhelagen können durch Nullsetzen des Klammerausdrucks in (3.26) bestimmt werden.

$$4aq^2 - 2b = 0 \quad (3.29)$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \frac{b}{2a} \quad (3.30)$$

$$\Leftrightarrow q_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{b}{2a}}. \quad (3.31)$$

Die Krümmung des Potentials an diesen Stellen ist positiv:

$$V''\left(q = \pm\sqrt{b/(2a)}\right) = 4b. \quad (3.32)$$

Hierbei handelt es sich also um die Täler der beiden Mulden des Potentials. Diese sind die stabilen Ruhelagen des Systems.

- b) Da das Potential nur von der Koordinate q abhängt, lässt sich die Hamiltonfunktion in diesem Fall einfach als Summe aus kinetischer und potentieller Energie anschreiben:

$$H(q, p) = T(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + aq^4 - bq^2 + \frac{b^2}{4a}. \quad (3.33)$$

Das Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q, p)$, auch "Hamilton-flow" genannt, lässt sich über die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bestimmen:

$$\mathbf{v}_H(q, p) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$= \begin{pmatrix} p/m \\ -4aq^3 + 2bq \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

- c) Für alle nachfolgenden Phasenraumportraits wurde $m = 1$ gesetzt und $a = 1/4$, $b = 1/2$ gewählt. Das Vektorfeld vereinfacht sich damit zu

$$\mathbf{v}_H(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -q^3 + q \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Ein Plot des Vektorfelds ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Die stabilen Ruhelagen befinden sich bei $q = \pm 1$.

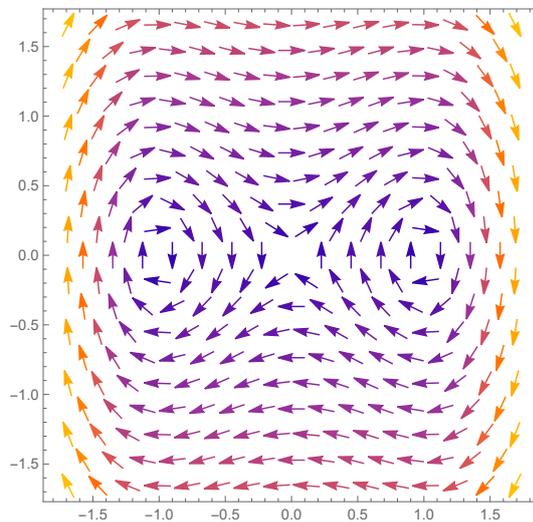


FIGURE 3.1: *Hamilton-flow des Doppelmuldenpotentials für $m = 1$, $a = 1/4$, $b = 1/2$.*

Bei diesem Vektorfeld handelt es sich um die jeweiligen Ableitungen der Phasenraumkoordinaten (also von generalisierter Koordinate

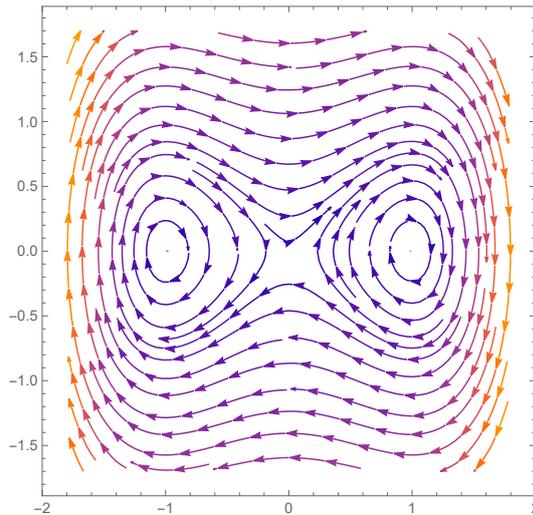


FIGURE 3.2: Trajektorien im Phasenraum des Doppelmuldenpotentials für $m = 1$, $a = 1/4$, $b = 1/2$.

und Impuls). Die Vektoren können somit als Tangentialvektoren an Trajektorien im Phasenraum aufgefasst werden. Dies wurde als Streamline-plot in Abbildung 3.2 dargestellt.

Treffen wir zuerst ein paar allgemeine Aussagen über die Trajektorien in Abbildung 3.2. Es ist gleich zu erkennen, dass die Trajektorien alle geschlossen sind. Das Teilchen bewegt sich also periodisch innerhalb des Potentials. An den Punkten $(q, p) = (\pm 1, 0)$ sind die Trajektorien Punkte. Dies entspricht genau dem Fall "Teilchen ruht in der Gleichgewichtslage". Der Punkt $(0, 0)$ wird in Unterpunkt *d*) noch thematisiert werden. Außerdem ist zu erkennen, dass die Trajektorien ihren maximalen (und minimalen) Wert von p immer an $q = \pm 1$ annimmt. Dies ist physikalisch sinnvoll, da die kinetische Energie maximal ist, wenn die potentielle Energie minimal ist. Umgekehrt gilt das selbe Prinzip. Der maximale/minimale Wert von q ist erreicht, wenn $p = 0$ ist. Dies entspricht den Umkehrpunkten der periodischen Bewegung.

Versuchen wir nun, einzelne Trajektorien zu untersuchen. Da die Hamiltonfunktion explizit zeitunabhängig ist, ist die Gesamtenergie des Systems zeitlich erhalten. Jede Trajektorie besitzt somit eine fixe Gesamtenergie. Was kann also über eine Trajektorie unseres Systems mit einer bestimmten Gesamtenergie E ausgesagt werden? Untersuchen wir dazu den Impuls des Teilchens an dem Zeitpunkt, wo es sich an der Stelle $q = 0$, also am Gipfel des Potentialberges befindet.

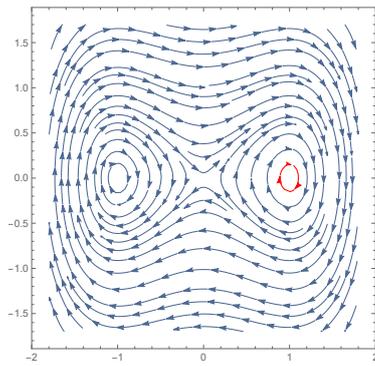
$$H(q = 0, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{b^2}{4a} = E \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow p = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{b^2}{4a} \right)} \quad (3.38)$$

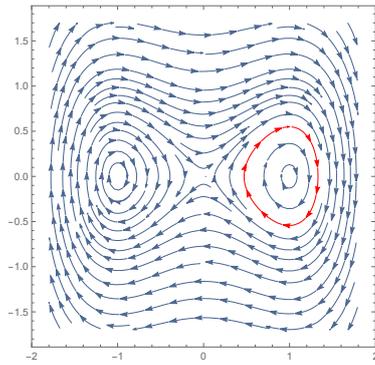
Für $E < \frac{b^2}{4a}$ existiert keine reelle Lösung für p . Es ist also nicht möglich,

dass das Teilchen sich an $q = 0$ befindet. Es besitzt nicht genug Energie, um den Potentialberg zu überqueren. Die Bewegung des Teilchens spielt sich in diesem Fall vollständig innerhalb einer der beiden Mulden ab. Das entspricht jenen Trajektorien, die um eines der Potentialminima $q = \pm 1$ herum verlaufen und die p -Achse nicht überqueren. Für $E > \frac{b^2}{4a}$ kann sich das Teilchen an $q = 0$ befinden und besitzt dort einen wohldefinierten Impuls (bis auf das Vorzeichen). Nun ist genug Energie vorhanden, um den Potentialberg zu überqueren.

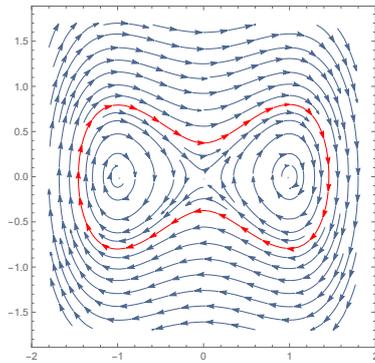
Diskutieren wir nun explizite Trajektorien:



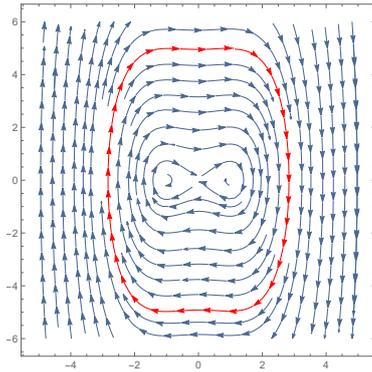
$E \ll \frac{b^2}{4a}$: Die Phasenraumkoordinaten der Trajektorie sind durchgehend sehr nahe an $(1, 0)$. Das Teilchen schwingt langsam und mit kleiner Auslenkung um die Ruhelage. Die annähernd elliptische Form der Trajektorie erinnert an die eines harmonischen Oszillators. Diese Beobachtung wird in den kommenden Unterpunkten noch relevant.



$E < \frac{b^2}{4a}$: Das Teilchen wird rechts des Minimums stärker beschleunigt als links. Das liegt daran, dass das Teilchen nun dem Überqueren des Berges näher kommt. Der Umkehrpunkt links des Minimums liegt weiter außen als rechts. Dadurch weicht die Trajektorie auch immer mehr von der des harm. Osz. ab.



$E > \frac{b^2}{4a}$: Nun hat das Teilchen genug Energie, um den Gipfel des Potentialberges zu überwinden und durchquert dadurch beide Mulden. Es wird während einer Periode mehrmals abwechselnd beschleunigt und abgebremst. Die beiden Umkehrpunkte liegen gleich weit vom Ursprung $q = 0$ entfernt.



$E \gg \frac{b^2}{4a}$: Das Teilchen hat nun so viel Energie, dass es durch den Potentialberg kaum mehr abgebremst wird. Dies kann anhand des relativ flachen Verlaufs der Trajektorie oben und unten erkannt werden. Die Trajektorie wird immer ähnlicher zu jenen eines $V(q) = aq^4$ Potentials.

d) Das Phasenraumportrait mit "Zoom" auf den Punkt $(0,0)$ ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Das schwarze "X" heißt Separatrix. Diese teilt den

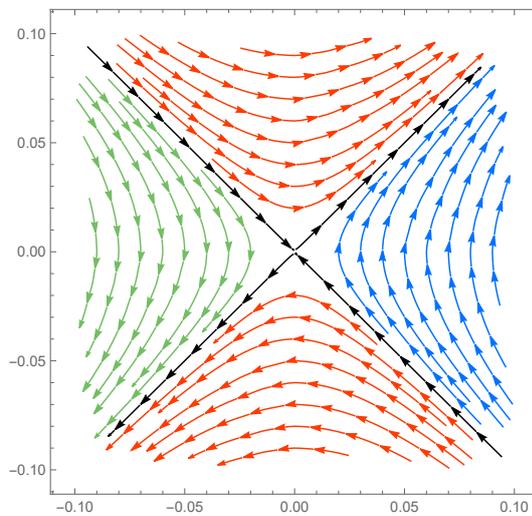


FIGURE 3.3: Phasenraumtrajektorien in der Nähe der instabilen Ruhelage

Phasenraum in drei Gebiete auf:

- Grün: Die Bewegung des Teilchens spielt sich ausschließlich innerhalb der linken Mulde ab. Der in Abbildung 3.3 zu sehende Teil der Trajektorien beschreibt den Prozess, dass das Teilchen kurz vor $q = 0$ zum Stillstand kommt und anschließend wieder in die Mulde zurückfällt. Für die Gesamtenergie der Trajektorien in diesem Bereich gilt $E < \frac{b^2}{4a}$.
- Blau: Analog zu grün, nur dass sich die Bewegung innerhalb der rechten Mulde abspielt. Auch hier gilt für die Gesamtenergie $E < \frac{b^2}{4a}$.
- Rot:

Rein intuitiv könnte man vermuten, dass die Trajektorie für den Fall $E = \frac{b^2}{4a}$ dem bereits erwähnten "X" entspricht. Hier treffen wir allerdings auf ein Problem: Trajektorien im Phasenraum dürfen sich nicht schneiden! Dann wäre nämlich die Eindeutigkeit der Lösungen

verletzt. Anders formuliert: Wie soll das Teilchen wissen, welchen der beiden Wege es nach dem Schnitt nehmen soll? Dieses Problem muss "manuell" gelöst werden. An der Stelle $q = 0$ ist der Impuls $p = 0$. Das Teilchen muss also genau so schnell den Potentialberg besteigen, dass es exakt an $q = 0$ zum Stillstand kommt. Verfolgen wir diesen Prozess allerdings zurück, kann dieser Fall nur dann auftreten, wenn das Teilchen zuvor auch schon den Impuls $p = 0$ an der Stelle $q = 0$ hatte. Es ist also unmöglich, dass das Teilchen ohne äußere Einflüsse am Berg zum Stillstand kommt. Ruht das Teilchen am Berg, so hat es das schon immer getan. Die einzig physikalisch sinnvolle Trajektorie für den Fall $E = \frac{b^2}{4a}$ ist also alleine der Punkt $(0, 0)$. Das "X" muss noch entfernt werden, um einen vollständig physikalischen Phasenraum zu erhalten.

- e) Bestimmen wir nun die Taylorentwicklung unseres Potentials am rechten Minimum. Diese ist gegeben durch

$$V(q) \approx \underbrace{V(q_0)}_{=0} + \underbrace{V'(q_0)}_{=0}(q - q_0) + \frac{1}{2}V''(q_0)(q - q_0)^2, \quad (3.39)$$

wobei $q_0 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$ ist.

$$V''(q_0) = 12aq_0^2 - 2b \quad (3.40)$$

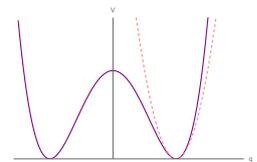
$$= 4b. \quad (3.41)$$

Unser Potential kann also am rechten Minimum angenähert werden durch

$$\tilde{V}(q) = 2b \left(q - \sqrt{\frac{b}{2a}} \right)^2. \quad (3.42)$$

Hierbei handelt es sich um das Potential eines harmonischen Oszillators mit $\omega = \sqrt{4b/m}$, dessen Ursprung um $\sqrt{b/2a}$ verschoben wurde. Es ist also kein Zufall, dass die Trajektorien in unmittelbarer Nähe von $(1, 0)$ elliptisch aussehen. Abbildung 3.4 zeigt den direkten Vergleich zwischen den Phasenraumportraits für das Doppelmuldenpotential und seiner Taylorentwicklung am rechten Minimum bis zur zweiten Ordnung.

Die Entwicklung des Potentials am linken Minimum würde das selbe Resultat liefern, außer dass der Ursprung des Oszillators in die andere Richtung verschoben ist.



Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):

3.1 a / 3.1 b / 3.1 c / 3.1 d / 3.2 ab / 3.2 c / 3.2 d / 3.2 e

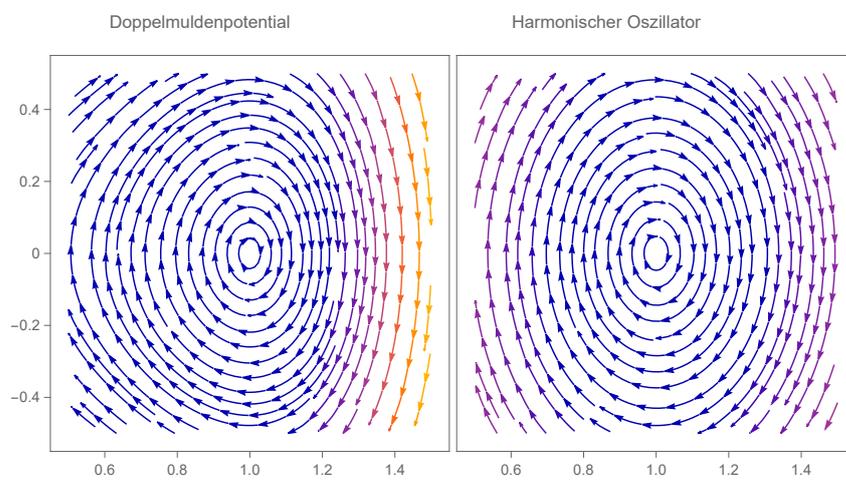


FIGURE 3.4: Vergleich der Phasenraumportraits vom Doppelmuldenpotential mit seiner Taylorentwicklung bis zur quadratischen Ordnung