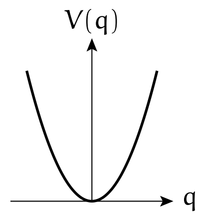
4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 09.01.2024

4

4.1 POISSON-KLAMMER: HARMONISCHER OSZILLATOR

Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Eigenfrequenz ω lautet

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{4.1}$$



Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ohne Differentiation der Hamiltonfunktion her. Verwenden Sie dazu die Gleichung (5.5) aus dem Vorlesungsmanuskript, nämlich

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{4.2}$$

sowie diverse Rechenregeln der Poisson-Klammer.

Lösung:

Aus der Vorlesung sind die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammern bekannt:

$$\{q_i, p_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \delta_{ik}\,, \tag{4.3}$$

$$\{q_i, q_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \{p_i, p_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0\,, \tag{4.4}$$

$$\{f, h\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = -\{h, f\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,, \tag{4.5}$$

$$\{g, \alpha h_1 + \beta h_2\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \alpha\{g, h_1\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \beta\{g, h_2\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,, \tag{4.6}$$

$$\{f, gh\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = g\{f, h\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \{f, g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,h\,. \tag{4.7}$$

Für den eindimensionalen Fall findet man insbesondere

$$\{q, p\}_{q,p} = 1\,, \tag{4.8}$$

$$\{p, q\}_{q,p} = -1\,, \tag{4.9}$$

$$\{p, p\}_{q,p} = \{q, q\}_{q,p} = 0\,. \tag{4.10}$$

Einsetzen für $g = q$ in die Relation aus der Angabe liefert

$$\dot{q} = \{q, H\} + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{=0} \tag{4.11}$$

$$= \frac{1}{2m}\{q, pp\} + \frac{m\omega^2}{2}\{q, qq\} \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{\{q,p\}}_{=1} + \underbrace{\{q,p\}}_{=1}p\Big) + \frac{m\omega^2}{2}\Big(q\underbrace{\{q,q\}}_{=0} + \underbrace{\{q,q\}}_{=0}q\Big) \tag{4.13}$$

$$= \frac{p}{m}\,. \tag{4.14}$$

Einsetzen für $g = p$ liefert

$$\dot{p} = \{p, H\} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}}_{=0} \tag{4.15}$$

$$= \frac{1}{2m}\{p, pp\} + \frac{m\omega^2}{2}\{p, qq\} \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{2m}\big(p\underbrace{\{p, p\}}_{=0} + \underbrace{\{p, p\}}_{=0}p\big) + \frac{m\omega^2}{2}\big(q\underbrace{\{p, q\}}_{=-1} + \underbrace{\{p, q\}}_{=-1}q\big) \tag{4.17}$$

$$= -m\omega^2 q\,. \tag{4.18}$$

Diese Bewegungsgleichungen sind genau jene, welche man durch Ableiten der Hamiltonfunktion erhält:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right) = \frac{p}{m}\,, \tag{4.19}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right) = -m\omega^2 q\,. \tag{4.20}$$

Betrachten Sie die eindimensionale kräftefreie Bewegung einer Punktmasse m und die Observable $g(q,p,t) = q - pt/m$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass $g(q,p,t)$ und $H(q,p,t)$ in diesem Fall Erhaltungsgrößen sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass auch die Größe $\partial_t g(q,p,t)$ eine Erhaltungsgröße ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass die Aussage aus Unterpunkt *b)* auch ganz allgemein für mechanische Systeme gilt: Wenn $H(q,p,t)$ und $g(q,p,t)$ Erhaltungsgrößen sind, so ist auch $\partial_t g(q,p,t)$ eine Erhaltungsgröße.

Siméon Denis Poisson

Lösung:

a) Die Hamiltonfunktion der kräftefreien eindimensionalen Punktmasse ist gegeben durch $H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}$. Für eine Erhaltungsgröße verschwindet die totale zeitliche Ableitung. Diese werden wir nun mittels der Poissonklammer berechnen:

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = \left\{q - \frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\} - \frac{p}{m} = \left\{q, \frac{p^2}{2m}\right\} - \underbrace{\left\{\frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\}}_{0} - \frac{p}{m} \\ &= \frac{1}{2m}\Big(p\{q,p\} + \{q,p\}p\Big) - \frac{p}{m} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

b) Wir berechnen nun die totale zeitliche Ableitung von $\partial_t g(q,p,t) = -\frac{p}{m}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, H\right\} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \left\{-\frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\} = 0\,. \tag{4.23}$$

c) Wir nehmen nun an, dass die totale zeitliche Ableitung sowohl von der Hamiltonfunktion $H(q,p,t)$, als auch von der Observablen $g(q,p,t)$ verschwindet, also:

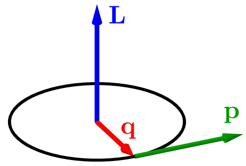
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,, \tag{4.24}$$

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0\,. \tag{4.25}$$

Aus Gleichung (4.25) folgt, dass $\frac{\partial g}{\partial t} = \{H, g\}$. Nun berechnen wir die totale zeitliche Ableitung von $\partial_t g(q,p,t)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) &= \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, H\right\} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} && (4.26)\\
&= \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, H\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{H, g\} && (4.27)\\
&= \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, H\right\} + \underbrace{\left\{\frac{\partial H}{\partial t}, g\right\}}_{0} + \left\{H, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} = 0\,. && (4.28)
\end{aligned}
$$

Von (4.27) auf (4.28) haben wir die Produktregel und die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitung ∂_t mit den partiellen Ableitungen, die in der Poissonklammer auftreten, verwendet.
In der letzten Zeile oben verschwindet der Term in der Mitte, weil $\partial H/\partial t = 0$ laut Gleichung (4.24). Die verbleibenden Poissonklammern heben sich wegen der Antisymmetrie auf und wir sehen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen auch $\partial_t g(q, p, t)$ eine Erhaltungsgröße ist.



Der Drehimpuls eines Teilchens im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, die z-Komponente ist damit $L_z = xp_y - yp_x$. $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sei eine von den Koordinaten $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ abhängige skalare Größe.

a) Geben Sie einen Ausdruck für die Poisson-Klammer $\{L_z, g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ an.

b) Berechnen Sie $\{L_z, q_i\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ und $\{L_z, p_i\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ für $i = x, y, z$.

c) Berechnen Sie $\{L_z, L_x\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$. Was erwarten Sie für $\{L_z, L_y\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ und $\{L_z, L_z\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$?

Lösung:

a) Die Poisson-Klammer ist diesmal nicht von einem eindimensionalen Ort/Impuls abhängig, sondern einer vektoriellen Größe.

$$\begin{aligned} \{L_z, g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_z}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial L_z}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) && (4.29) \\ &= p_y \frac{\partial g}{\partial p_x} - (-y) \frac{\partial g}{\partial x} + (-p_x) \frac{\partial g}{\partial p_y} - x \frac{\partial g}{\partial y} && (4.30) \\ &= -x \frac{\partial g}{\partial y} + y \frac{\partial g}{\partial x} - p_x \frac{\partial g}{\partial p_y} + p_y \frac{\partial g}{\partial p_x} \,. && (4.31) \end{aligned}$$

b) Man kann nun entweder das Ergebnis aus *a)* verwenden, oder man nutzt die Eigenschaften der Poisson-Klammern. Hier wird Zweiteres durchgeführt, da Ersteres trivial ist. Ab sofort wird x bzw. y als q_x bzw. q_y ausgedrückt.

$$\begin{aligned} \{L_z, q_i\} &= \{q_x p_y - q_y p_x, q_i\} && (4.32) \\ &= \{q_x p_y, q_i\} - \{q_y p_x, q_i\} && (4.33) \\ &= q_x \{p_y, q_i\} + \{q_x, q_i\} p_y - q_y \{p_x, q_i\} - \{q_y, q_i\} p_x \,. && (4.34) \end{aligned}$$

Nun können wir gleich alle Komponenten ablesen:

$$\begin{aligned} \{L_z, q_x\} &= q_y \,, \\ \{L_z, q_y\} &= -q_x \,, \\ \{L_z, q_z\} &= 0 \,. \end{aligned}$$

Analog dazu, wenn man in (4.34) $\{\cdot, q_i\}$ durch $\{\cdot, p_i\}$ ersetzt:

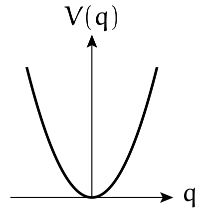
$$\begin{aligned} \{L_z, p_x\} &= p_y \,, \\ \{L_z, p_y\} &= -p_x \,, \\ \{L_z, p_z\} &= 0 \,. \end{aligned}$$

c) L_x schreiben wir nun als $q_y p_z - q_z p_y$ an. Durch das Ergebnis von *b)* können wir die Poisson-Klammer schnell ausrechnen.

$$\begin{aligned} \{L_z, L_x\} &= \{L_z, q_y\} p_z + q_y \{L_z, p_z\} - \{L_z, q_z\} p_y - q_z \{L_z, p_y\} && (4.35) \\ &= -q_x p_z + 0 - 0 + q_z p_x = q_z p_x - q_x p_z = L_y \,. && (4.36) \end{aligned}$$

Mit einer Umbenennung der Achsen $x \mapsto y$ und $y \mapsto -x$ ist zu erwarten, dass $\{L_z, L_y\} = -L_x$.
Aus der Antisymmetrie der Poisson-Klammer folgt $\{L_z, L_z\} = 0$.
Allgemein folgt der Drehimpuls folgendem Schema: $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$.

Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Eigenfrequenz ω lautet



$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{4.37}$$

Wir führen die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \bar{q} &= C(p + im\omega q), && (4.38) \\ \bar{p} &= C(p - im\omega q) && (4.39) \end{aligned}$$

ein, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass dies eine kanonische Transformation darstellt. Verwenden Sie dazu die Poisson-Klammer.

b) Berechnen Sie die transformierte Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$.

c) Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten an und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\bar{q}(t=0) = \bar{q}_0$ und $\bar{p}(t=0) = \bar{p}_0$.

d) Transformieren Sie Ihr Ergebnis in die ursprünglichen Koordinaten q und p zurück. Transformieren Sie dafür auch die Anfangsbedingungen mit, d.h. verwenden Sie $\bar{q}_0 = C(p_0 + im\omega q_0)$ und $\bar{p}_0 = C(p_0 - im\omega q_0)$.

Lösung:

a) Damit die gegebene Transformation kanonisch ist, muss sie die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} &\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{\bar{p}, \bar{p}\} = 0\,, && (4.40) \\ &\{\bar{q}, \bar{p}\} = 1 && (4.41) \end{aligned}$$

erfüllen. Unter Verwendung der Bilinearität und der Antisymmetrie der Poisson-Klammern lässt sich aus diesen Relationen die Konstante C bestimmen:

$$\begin{aligned} \{\bar{q}, \bar{p}\} &= C^2\{p + im\omega q, p - im\omega q\} \\ &= C^2\left[\{p, p - im\omega q\} + im\omega\{q, p - im\omega q\}\right] \\ &= C^2\left[-im\omega\{p,q\} + im\omega\{q,p\}\right] \\ &= C^2[2im\omega] \\ &\overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = \pm\frac{1}{\sqrt{2im\omega}}\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Beide Vorzeichen der Wurzel erfüllen die fundamentalen Poisson-Klammern. Da C nur quadratisch in H vorkommt, hat dies keine Auswirkung auf das Ergebnis.

b) Um die transformierte Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$ zu berechnen, müssen zuerst p und q in den transformierten Variablen ausgedrückt werden:

$$\bar{q} - \bar{p} = 2Cim\omega q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\bar{q} - \bar{p}}{2Cim\omega}, \tag{4.43}$$

$$\bar{q} + \bar{p} = 2Cp \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\bar{q} + \bar{p}}{2C}. \tag{4.44}$$

Eingesetzt in die Hamiltonfunktion ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\bar{q} + \bar{p}}{2C}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\bar{q} - \bar{p}}{2Cim\omega}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8mC^2}(\bar{q} + \bar{p})^2 - \frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{4C^2m^2\omega^2}(\bar{q} - \bar{p})^2 \\
&= \frac{2im\omega}{8m}(\bar{q} + \bar{p})^2 - \frac{m\omega^2}{8}\frac{2im\omega}{m^2\omega^2}(\bar{q} - \bar{p})^2 \\
&= \frac{1}{4}i\omega(\bar{q}^2 + 2\bar{q}\bar{p} + \bar{p}^2 - \bar{q}^2 + 2\bar{q}\bar{p} - \bar{p}^2) \\
&= i\omega\bar{q}\bar{p}\,.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

c) Die Bewegungsgleichungen in den transformierten Koordinaten lauten:

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = i\omega\bar{q}\,, \tag{4.46}$$

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} = -i\omega\bar{p}\,. \tag{4.47}$$

Die Bewegungsgleichungen sind entkoppelt! Der Ansatz für die Differentialgleichungen lässt sich z.B. mittels Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{q}}{dt} &= i\omega\bar{q} \\
\Leftrightarrow \int \frac{d\bar{q}}{\bar{q}} &= \int i\omega\, dt \\
\Leftrightarrow \ln\bar{q} &= i\omega t + K \\
\Leftrightarrow \bar{q}(t) &= Ae^{i\omega t}\,.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Analog lässt sich zeigen, dass $\bar{p}(t) = Be^{-i\omega t}$ die Bewegungsgleichung (4.47) löst. Über die Anfangsbedingungen aus der Angabe ergibt sich für die Konstanten:

$$\bar{q}(t = 0) = \bar{q}_0 = A\,, \tag{4.49}$$

$$\bar{p}(t = 0) = \bar{p}_0 = B\,. \tag{4.50}$$

Die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten ist daher:

$$\bar{q}(t) = \bar{q}_0 e^{i\omega t}\,, \tag{4.51}$$

$$\bar{p}(t) = \bar{p}_0 e^{-i\omega t}\,. \tag{4.52}$$

d) Für die Rücktransformation werden die Koordinaten $\bar{q}(t)$ und $\bar{p}(t)$ mithilfe der Gleichungen (4.43) und (4.44) berechnet. Dabei müssen auch die rücktransformierten Anfangsbedingungen aus der Angabe berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
q(t) &= \frac{\bar{q}(t) - \bar{p}(t)}{2Cim\omega} \\
&= \frac{1}{2Cim\omega}(\bar{q}_0 e^{i\omega t} - \bar{p}_0 e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2Cim\omega}(C(p_0 + im\omega q_0)e^{i\omega t} - C(p_0 - im\omega q_0)e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{C}{2Cim\omega}((p_0 + im\omega q_0)e^{i\omega t} - (p_0 - im\omega q_0)e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2im\omega}(p_0(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + im\omega q_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})) \\
&= \frac{1}{2im\omega}(p_0 2i\sin(\omega t)) + im\omega q_0 2\cos(\omega t)) \\
&= \frac{1}{m\omega}(p_0 \sin(\omega t) + m\omega q_0 \cos(\omega t)) \\
&= \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) + q_0\cos(\omega t)\,. \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Für $p(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{\bar{q}(t) + \bar{p}(t)}{2C} \\
&= \frac{1}{2C}(\bar{q}_0 e^{i\omega t} + \bar{p}_0 e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2C}(C(p_0 + im\omega q_0)e^{i\omega t} + C(p_0 - im\omega q_0)e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2}((p_0 + im\omega q_0)e^{i\omega t} + (p_0 - im\omega q_0)e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2}(p_0 2\cos(\omega t) + im\omega q_0 2i\sin(\omega t)) \\
&= p_0\cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t)\,. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
4.1 / 4.2 *ab* / 4.2 *c* / 4.3 *ab* / 4.3 *c* / 4.4 *a* / 4.4 *b* / 4.4 *cd*