

Übungsblatt 2

für das Tutorium am 20.03.2015

1. Krummlinige Koordinaten

Berechne $\vec{\nabla}R$ und ΔR mit $R = |\vec{R}|$, wobei $\vec{R} = (x, y, z)$, in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten.

2. Monopole und elektrisch-magnetische Dualität

- Betrachte die Maxwellgleichungen im Vakuum ohne äussere Quellen (in Gauß-Einheiten). Zeige, dass die Gleichungen invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ sind. Gilt die Dualität auch noch in Anwesenheit von Quellen?
- Nimm nun an, dass neben elektrischen Ladungen und Strömen (ρ_e, \vec{j}_e) auch noch magnetische Ladungen und Ströme (ρ_m, \vec{j}_m) existieren¹, die sich analog zu den elektrischen Größen verhalten. Wie sehen die Maxwellgleichungen in diesem Fall aus?
- Zeige, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen invariant unter einer allgemeineren Version der elektrisch-magnetischen Dualität sind, wo Felder und Quellen in Linearkombinationen derselben transformieren. Wie sehen die Transformationseigenschaften der Felder und Quellen aus?
Hinweis: Es geht allgemeiner als nur der Austausch der Feldstärken: Führe eine Winkelvariable ξ ein. Dann transformiert zum Beispiel das elektrische Feld als $\vec{E}' = \vec{E} \cos \xi - \vec{B} \sin \xi$. Wie sehen die Transformationen der anderen Größen aus? Was bedeuten die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$?
- Zeige, dass die Energiedichte und die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes invariant unter der Dualitätstransformation sind.

3. Punktladungen

Betrachte zwei Punktladungen q_1 und q_2 an $z = \pm a$ und $x = y = 0$.

- Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Gesamtladung.
- Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zunächst für beliebiges \vec{r} . Was ist das Feld an $\vec{r} = (0, y, 0)$ für $q_1 = q_2$ und $q_1 = -q_2$?
- Verwende den Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik um die Kraft von q_1 auf q_2 für den Fall $q_1 = q_2 = q$ als Oberflächenintegral des Maxwell'schen Spannungstensors entlang der Symmetrieebene $z = 0$ auszurechnen.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2cd, 3ab, 3c

¹Magnetische Monopole sind in der Natur noch nicht beobachtet worden. Sie spielen jedoch in Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik, z.B. in der Stringtheorie, eine wichtige Rolle.