

Übungsblatt 1

für das Tutorium am 09.03.2018

1. Satz von Gauß

Verifiziere den Satz von Gauß für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (2x - z, x^2y, -xz^2)^T, \quad (1)$$

wobei das Integrationsvolumen durch $x, y, z \in [0, 1]$ begrenzt wird.

(a) Berechne $\oint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$.

(b) Berechne $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$.

2. Satz von Stokes

Verifiziere den Satz von Stokes für ein Vektorfeld $\vec{F} = (x^2 + y^2, y, z^2)^T$ und eine Fläche S , definiert durch ein Rotationsparaboloid, gegeben durch

$$z = R^2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0, \quad R \geq 0. \quad (2)$$

(a) Berechne $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

(b) Berechne $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}$.

3. Indexgymnastik

(a) Zeige, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist.

(b) Berechne Divergenz und Rotation von $\vec{a} \times \vec{b}$, wobei \vec{a} und \vec{b} Vektorfelder sind, die von $\vec{r} = x_i$ abhängen.(c) Sei $\vec{r} = x_i$, $r = (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ und $\vec{r}' \neq \vec{r}$. Berechne die Divergenz von $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$.(d) Berechne $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{r}}{r} f(r) \right)$, wobei die skalare Funktion f nur von r abhängt.

Ankreuzbar: 1ab, 2a, 2b, 3ab, 3cd