10. Tutorium - Lösungen 12.06.2020

10.1 Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom

a) Die Zylinderkoordinaten werden entlang der y-Achse angewendet.
Für $\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$ erhält man

$$\int \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \mathrm{d}\vec{f}$$

und damit

$$\vec{B} = \frac{2I_1}{c} \left(\frac{z}{z^2 + (x-d)^2}, 0, \frac{d-x}{z^2 + (x-d)^2} \right).$$

Die Berechnung des Vektorpotentials erfolgt über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

$$A_y = -\frac{I_1}{c} \ln \left[z^2 + (x-d)^2 \right].$$

b) Die Kraft auf den Leiter wird berechnet durch: $\vec{F} = \frac{I_2}{c} \int_{L_2} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}(r)$, mit $\vec{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. $\mathrm{d}\vec{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) a \mathrm{d}\varphi$, und $\vec{B}_1(z=0) = (0, 0, 2I_1/(c(d-x)))$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{4\pi}{c^2} I_1 I_2 \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{\sqrt{d^2 - a^2}}, \\ F_y &= 0. \end{aligned}$$

10.2 Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt

a) Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie, wie man folgendermaßen sieht: Z.B. für $\varphi = 0$ in der $y = 0$ Ebene addieren sich an einem Ort $\vec{r} = (x, 0, z)$ die Beiträge vom Ort $\vec{r}' = (x', y', z')$ mit Strom in Richtung $\vec{j}(\vec{r}') = (j_x, j_y, j_z)$ und vom an $y = 0$ gespiegelten Ort $\vec{r}'' = (x', -y', z')$ mit $\vec{j}(j_x, -j_y, j_z)$ folgendermaßen auf $\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') + \vec{j}(\vec{r}'') \times (\vec{r} - \vec{r}'') = 2\left(j_z(x - x') - j_x(z - z')\right) \vec{e}_y$, sodass die $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Komponenten verschwinden. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.
Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{j}.$$

Somit folgt:

$$B_\varphi = -\frac{2}{c} \frac{IN}{r}$$

b) Der Fluss für eine Windung ist gegeben durch:

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{B} = \frac{2INb}{c} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Die Selbstinduktion für den Gesamtfluss $\Phi_N = N\Phi_1$ beträgt:

$$L = \frac{1}{c} \Phi_N \frac{1}{I} = \frac{2N^2 b}{c^2} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Eine Abschätzung $b \ln \frac{R_0+a}{R_0} > a \ln \frac{R_0+b}{R_0}$ kann über eine Substitution $b = R_0(\exp(\tilde{b}) - 1) > 0$ mit anschließender Taylor-Entwicklung erfolgen. Daraus folgt, dass die ursprüngliche Orientierung die größere Selbstinduktion hat.

10.3 Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt

Für die Berechnung von $\vec{B}$ wird am einfachsten die Integralform des Oerstedschen Gesetzes angewendet. Im Inneren eines Zylinders gilt: $\oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^2\vec{f}$. Aus Symmetriegründen gilt daher $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$.
$2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} j_0 r^2 \pi$. Somit folgt $\vec{B} = \frac{2\pi}{c} j_0(-y, x, 0)$.
Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung ergibt $\vec{B}(x, y) = -\frac{4\pi}{c} a j_0 \vec{e}_y$.