

## 2. Test - Quantentheorie I - 31.01.2008

1. **15 Punkte** Das Elektron eines Wasserstoffatoms sei im Zustand (Hauptquantenzahl  $n = 4$ , Basis  $|l s m_l m_s\rangle$ )

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} |1 \frac{1}{2} 0 -\frac{1}{2}\rangle + |1 \frac{1}{2} -1 +\frac{1}{2}\rangle \right). \quad (1)$$

*Hinweis:* Auf der Rückseite finden Sie eine Tabelle mit Clebsch-Gordan Koeffizienten.

- (a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, für  $L^2$  den Wert (i)  $\frac{3}{4}\hbar^2$  bzw. (ii)  $2\hbar^2$  zu messen.

Da  $L^2 |l s m_l m_s\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l s m_l m_s\rangle$ , entspricht  $L^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$  der Quantenzahl  $l = \frac{1}{2}$ , und  $L^2 = 2\hbar^2$  entspricht  $l = 1$ . Da die Wellenfunktionen nur aus Anteilen mit  $l = 1$  besteht, ist  $P(l = \frac{1}{2}) = 0$ ,  $P(l = 1) = 1$ .

- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von  $J_z = L_z + S_z$  den Wert  $-\frac{1}{2}\hbar$  zu messen. Berechnen Sie weiters den Erwartungswert  $\langle J^2 \rangle$  des Gesamtdrehimpulses.

Es gilt  $J_z |l s m_l m_s\rangle = (L_z + S_z) |l s m_l m_s\rangle = \hbar(m_l + m_s) |l s m_l m_s\rangle = \hbar m_j |l s m_l m_s\rangle$ . Für beide Teile der Wellenfunktion ist  $m_l + m_s = -\frac{1}{2}$ , d.h.  $P(m_j = -\frac{1}{2}) = 1$ . Um  $\langle J^2 \rangle$  auszurechnen, transformieren wir die Wellenfunktionen mit Hilfe der Clebsch-Gordan Koeffizienten zu  $l_1 = 1, l_2 = \frac{1}{2}$  (mit  $l_1 \equiv l, l_2 \equiv s$ ) in die Basis  $|l s j m_j\rangle$ . Wir wissen bereits, dass  $m_j = -\frac{1}{2}$  gilt. Es gilt weiter  $|l - s| \leq j \leq l + s$ , d.h.  $j \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ . Zur Unterscheidung notieren wir die gekoppelte Basis mit  $|j m_j\rangle$ , und lassen die Quantenzahlen  $l = 1, s = \frac{1}{2}$  weg.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} |1 \frac{1}{2} 0 -\frac{1}{2}\rangle + |1 \frac{1}{2} -1 +\frac{1}{2}\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( (2+1) | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle + (\sqrt{2} - \sqrt{2}) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \right) = | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle \end{aligned}$$

Damit gilt  $\langle J^2 \rangle = \langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1)\hbar^2 = \frac{15}{4}\hbar^2$ .

- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Spin-Bahn Kopplung  $H_{LS} = \beta \vec{L} \cdot \vec{S}$ . *Hinweis:* Stellen Sie  $H_{LS}$  durch Operatoren dar, die Sie auf  $|l s j m_j\rangle$  anwenden können.

$$\begin{aligned} J^2 &= (\vec{L} + \vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \quad \rightarrow \quad \beta \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{\beta}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \\ \langle H_{LS} \rangle &= \frac{\beta}{2} \left( \frac{15}{4}\hbar^2 - 2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 \right) = \frac{\beta}{2}\hbar^2 \end{aligned}$$

- (d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, zuerst für  $L_z$  den Wert  $0\hbar$  und gleich darauf für  $J^2$  den Wert  $\frac{3}{4}\hbar^2$  zu messen. Hängt diese Wahrscheinlichkeit von der Reihenfolge ab, in der die Messungen stattfinden? Warum (nicht)? Wenn ja, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in umgekehrter Messreihenfolge?

$L_z$  ist in der Basis  $|l s m_l m_s\rangle$  diagonal,  $L_z |l s m_l m_s\rangle = \hbar m_l |l s m_l m_s\rangle$ . Die Wahrscheinlichkeit,  $L_z = 0$ , d.h.  $m_l = 0$  zu messen, beträgt  $P(m_l = 0) = \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \right|^2 = \frac{2}{3}$ , da nur der erste Term den Eigenwert  $m_l = 0$  hat. Durch Kollaps der Wellenfunktion bleibt nur der erste Term über, d.h. nach der Messung befindet sich das Teilchen im (renormierten) Zustand  $|1 \frac{1}{2} 0 -\frac{1}{2}\rangle$ . Diesen transformieren wir wieder in die Basis  $|l s j m_j\rangle$  (die wir mit  $|j m_j\rangle$  notieren).

$$|1 \frac{1}{2} 0 -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit,  $J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$  ( $j = \frac{1}{2}$ ) zu messen, ist nun  $\frac{1}{3}$ . Die Gesamtwahrscheinlichkeit, zuerst  $L_z = 0$  und gleich darauf  $J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$  zu messen, ist also  $P(m_l = 0, j = \frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ .

$J^2$  und  $L_z$  kommutieren nicht, da gilt  $J^2 = L^2 + S^2 + 2(L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z)$ , und  $[L_{x,y}, L_z] \neq 0$ . Deswegen ist die Messreihenfolge wichtig. Insbesondere gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, zuerst  $j = \frac{1}{2}$  zu messen, gleich 0 ist, da  $|\psi\rangle = |\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle$ . Damit verschwindet die Wahrscheinlichkeit bei vertauschter Messreihenfolge.

2. **10 Punkte** Ein Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen befinde sich im homogenen Magnetfeld  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_z)$ . Der Hamiltonoperator eines Teilchens im Magnetfeld ist gegeben durch

$$H = \mu_B \vec{B} \cdot \vec{S}, \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (2)$$

Das Teilchen befinde sich im Grundzustand  $|-\rangle$  (Die Energieeigenzustände des Teilchens seien mit  $|+\rangle, |-\rangle$  notiert). Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  wird ein zusätzliches Feld

$$\vec{B}_S = \frac{B_S}{\sqrt{2}} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_S \ll B_z \quad (3)$$

eingeschaltet.

- (a) Geben Sie die Eigenenergien des ungestörten Systems (d.h.  $\vec{B} = \vec{B}_0$ ) an.

Wir definieren  $\Omega_z = \mu_B B_z$  und  $\Omega_S = \mu_B B_S$ .

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{B}_z &\rightarrow H_0 = \mu_B B_z S_z = \Omega_z S_z \\ H_0 |-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} \Omega_z |-\rangle \quad H_0 |+\rangle = \frac{\hbar}{2} \Omega_z |+\rangle \end{aligned}$$

Damit folgt  $E_- = -\frac{\hbar}{2} \Omega_z$ ,  $E_+ = \frac{\hbar}{2} \Omega_z$ .

- (b) Geben Sie den Hamiltonoperator  $H_S$  der Störung explizit an.

$$\begin{aligned} H_S &= \mu_B \vec{B}_S \cdot \vec{S} = \mu_B \frac{B_S}{\sqrt{2}} \sin(\omega t) (S_x + S_y) \\ H_S^{\{+,-\}} &= \frac{\hbar}{2} \Omega_S \sin(\omega t) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Berechnen Sie das Übergangsmatrixelement  $\langle + | H_S | - \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle + | H_S | - \rangle &= \frac{\hbar}{2} \Omega_S \sin(\omega t) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle + | H_S | - \rangle &= \frac{\hbar}{2} \Omega_S \sin(\omega t) \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in erster Ordnung Störungstheorie), dass das Teilchen nach einer Schwingungsperiode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  vom Grundzustand  $|-\rangle$  in den angeregten Zustand  $|+\rangle$  übergeht?

$$\begin{aligned} P_{- \rightarrow +}^{(1)} &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^T dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_+ - E_-)t} \langle + | H_S | - \rangle \right|^2 = \frac{\Omega_S^2}{4} \left| \int_0^T dt e^{i\Omega_z t} \sin(\omega t) \right|^2 \\ &= \frac{\Omega_S^2}{4} \left| \int_0^T dt e^{i\Omega_z t} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right|^2 = \frac{\Omega_S^2}{16} \left| \int_0^T dt (e^{i(\Omega_z + \omega)t} - e^{i(\Omega_z - \omega)t}) \right|^2 \\ &= \frac{\Omega_S^2}{16} \left| \left( \frac{e^{i(\Omega_z + \omega)T} - 1}{\Omega_z + \omega} - \frac{e^{i(\Omega_z - \omega)T} - 1}{\Omega_z - \omega} \right) \right|^2 = \frac{\Omega_S^2}{16} \left| (e^{i\Omega_z T} - 1) \left( \frac{1}{\Omega_z + \omega} - \frac{1}{\Omega_z - \omega} \right) \right|^2 \\ &= \frac{\Omega_S^2}{16} \left| e^{i\frac{\Omega_z}{2}T} (e^{i\frac{\Omega_z}{2}T} - e^{-i\frac{\Omega_z}{2}T}) \frac{2\omega}{\Omega_z^2 - \omega^2} \right|^2 = \frac{\Omega_S^2 \omega^2}{(\Omega_z^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega_z}{2} T \right) \\ &= \frac{\Omega_S^2 \omega^2}{(\Omega_z^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega_z}{\omega} \pi \right) \end{aligned}$$

Wir haben hierbei  $e^{i\omega T} = 1$  verwendet.

Hinweis:

$$\sigma_x^{\{+,-\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^{\{+,-\}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z^{\{+,-\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

3. **15 Punkte** Betrachten Sie einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = H_0 + V, \quad H_0 = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{m\omega^2}{2} (X_1^2 + X_2^2), \quad (5)$$

$$V = \gamma m\omega^2 X_1 X_2, \quad \gamma \ll 1 \quad (6)$$

(a) Bestimmen Sie die niedrigsten drei Energieniveaus von  $H_0$ , deren Entartung, und die dazugehörigen Zustände.

$H_0 = \hbar\omega(N_1 + N_2 + 1)$ , wir wählen als Basis  $|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_2$ , so dass  $N_1 |n_1 n_2\rangle = n_1 |n_1 n_2\rangle$  und  $N_2 |n_1 n_2\rangle = n_2 |n_1 n_2\rangle$ . Damit gilt

Energie	Zustände	Entartung
$E_0 = \hbar\omega$	$\{ 0 0\rangle\}$	1
$E_1 = 2\hbar\omega$	$\{ 1 0\rangle,  0 1\rangle\}$	2
$E_2 = 3\hbar\omega$	$\{ 2 0\rangle,  0 2\rangle,  1 1\rangle\}$	3

(b) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energiekorrekturen zu den niedrigsten zwei Energieniveaus.

Wir schreiben die Störung um

$$V = \gamma m\omega^2 x_0 (a_1^\dagger + a_1) x_0 (a_2^\dagger + a_2)$$

$$V = \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega (a_1^\dagger + a_1) (a_2^\dagger + a_2)$$

Der Grundzustand mit Energie  $E_0$  ist nicht entartet, die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie ist somit

$$\varepsilon_0^{(1)} = \langle 0 0 | V | 0 0 \rangle = \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega \langle 0 0 | 1 1 \rangle = 0$$

Der erste angeregte Zustand (Energie  $E_1$ ) ist entartet, wir diagonalisieren also die Störung in dem entarteten Unterraum:

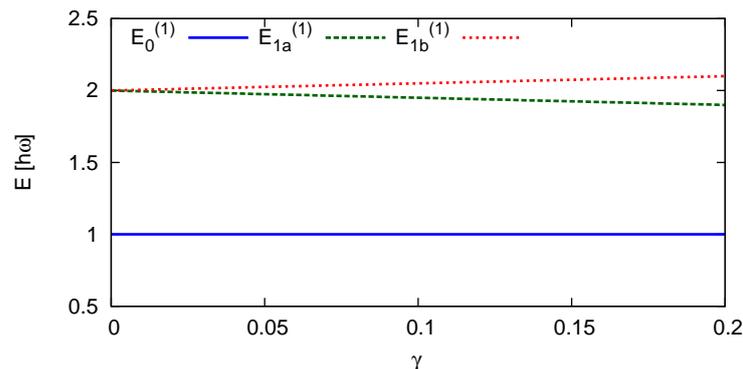
$$\widehat{V}_1 = \begin{pmatrix} \langle 1 0 | V | 1 0 \rangle & \langle 1 0 | V | 0 1 \rangle \\ \langle 0 1 | V | 1 0 \rangle & \langle 0 1 | V | 0 1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\widehat{V}_1 = \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Energiekorrekturen sind die Eigenwerte dieser Matrix, mit  $\det(\widehat{V}_1 - \varepsilon_1^{(1)} \mathbb{1}) = 0$  ergibt sich  $\varepsilon_{1a}^{(1)} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar\omega$ ,  $\varepsilon_{1b}^{(1)} = \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega$ .

(c) Zeichnen Sie ein Niveaudiagramm der niedrigsten zwei Energieniveaus in Abhängigkeit von  $\gamma$ . Inwiefern hebt die Störung die Entartung auf?

$$E_0^{(1)} = E_0 = \hbar\omega, \quad E_{1a}^{(1)} = E_1 - \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega = \hbar\omega(2 - \frac{\gamma}{2}), \quad E_{1b}^{(1)} = E_1 + \frac{1}{2} \gamma \hbar\omega = \hbar\omega(2 + \frac{\gamma}{2}).$$



- (d) Geben Sie (in der in (a) gewählten Basis) die für die oben berechneten Energiekorrekturen durch die Störung ausgezeichneten Eigenzustände von  $H_0$  (d.h. in nullter Ordnung) an.

---

Wir berechnen hierzu die zu den Eigenwerten von  $\hat{V}_1$  gehörigen Eigenvektoren.

$$\hat{v}_{1a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_{1b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Basis  $|n_1 n_2\rangle$  ergibt sich  $v_{1a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 0\rangle - |0 1\rangle)$  und  $v_{1b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 0\rangle + |0 1\rangle)$ . Da der Grundzustand  $|0 0\rangle$  nicht entartet ist, ist er bereits eindeutig und in nullter Ordnung unverändert.

- (e) Geben Sie für den Grundzustand die Energiekorrektur in zweiter Ordnung Störungstheorie an.

---


$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(2)} &= \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{|\langle n_1 n_2 | V | 0 0 \rangle|^2}{\hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) - \hbar\omega} \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{|\frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \langle n_1 n_2 | 1 1 \rangle|^2}{\hbar\omega(n_1 + n_2)} \\ &= \frac{\gamma^2}{8} \hbar\omega \end{aligned}$$

In der Summe bleibt nur der Term mit  $n_1 = 1, n_2 = 1$  übrig.

### 34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

Notation:

$J$	$J$	$\dots$
$M$	$M$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<b>Coefficients</b>		

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$   
 $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$   
 $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)$   
 $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$   
 $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2   j_1 j_2 J M \rangle$	$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1   j_2 j_1 J M \rangle$
---	--

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$	$d_{1,0}^1 = \cos \theta$	$d_{1/2,1/2}^1 = \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$
	$d_{1/2,-1/2}^1 = -\sin \frac{\theta}{2}$	$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$	$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$			
$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^2$	$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$	$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$	$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$	$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)^2$	$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$	$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$	$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$	$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)$

**Figure 34.1:** The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.