

# 12. Tutorium - Quantentheorie I

## 16.01.2015

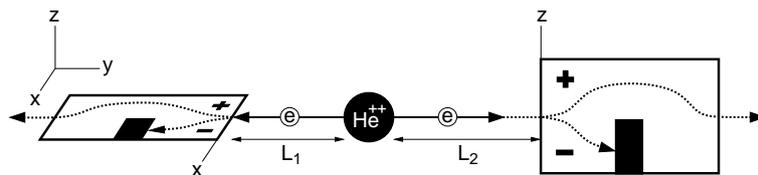
1. Ein Spin  $s = 1/2$  befinde sich im Zustand

$$|\chi\rangle = \frac{2}{3}|+\rangle + \frac{i\sqrt{5}}{3}|-\rangle,$$

wobei  $|+\rangle, |-\rangle$  die Eigenzustände von  $S_z$  zu den Eigenwerten  $\hbar/2$  bzw.  $-\hbar/2$  sind.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Unschärfe von  $S_y$  in diesem Zustand.
  - b) Entlang welcher Raumrichtung müssen Sie den Spin des Zustands  $|\chi\rangle$  messen um mit Wahrscheinlichkeit 1 den Messwert  $\hbar/2$  zu bekommen? Zeichnen Sie den Zustand in einer Blochkugel ein. (*Hinweis:* Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus Bsp. 3 des 10. Tutoriums.)
2. a) Nehmen Sie an, dass Sie vor der Aufgabe stehen mit Hilfe von Magnet-Resonanz-Tomographie (MRT) die Konzentration des Kohlenstoff-Isotops  $^{13}\text{C}$  im Körper eines Patienten zu bestimmen. Durch seine ungerade Nukleonenzahl hat  $^{13}\text{C}$  einen Kernspin mit Spinquantenzahl  $s = 1/2$ . In einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , tritt somit eine Zeeman-Aufspaltung bezüglich der beiden möglichen Spinausrichtungen  $m = \pm 1/2$  auf.
- i. Berechnen Sie die entsprechende Magnetfeldstärke  $B$ , um einen Übergang zwischen den zwei auftretenden Energieniveaus zu induzieren, wenn die Übergangsfrequenz  $f$ , wie in der Medizin üblich, im Radiofrequenzbereich liegt, z.B.  $f = 100$  MHz.
  - ii. Wie groß müsste  $B$  sein, um bei gleicher Frequenz eine Resonanz zu induzieren, wenn anstatt eines Atomkerns ein einzelnes Elektron betrachtet wird.
  - iii. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, wieso bei herkömmlichen MRT-Geräten supraleitende Spulen zum Einsatz kommen.

- b) Der in a) betrachtete Kernspin im homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  sei nun zum Zeitpunkt  $t = 0$  so ausgerichtet, dass bei einer Messung seiner  $y$ -Komponente mit Wahrscheinlichkeit 1 der Wert  $+\hbar/2$  gemessen wird.
- Stellen Sie diesen Anfangszustand in der  $S_z$ -Eigenbasis dar.
  - Berechnen Sie, in welchem Zustand sich der Spin zu einem Zeitpunkt  $t > 0$  befindet. Geben Sie auch diesen Zustand in der  $S_z$ -Eigenbasis an.
  - Nach welcher minimalen Zeit  $\tau$  finden Sie bei einer Messung in  $-y$ -Richtung mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert  $+\hbar/2$ ?
3. Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin  $s = 0$ . Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach positiv geladenen Atomkern ( $\text{He}^{++}$ ) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben sind, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



- Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand  $|s = 0, m_s = 0\rangle$  in der Produktbasis der beiden Elektronen  $|s_1, m_{s,1}\rangle$ ,  $|s_2, m_{s,2}\rangle$  anschreiben lässt. (Eine Clebsch-Gordan-Tabelle finden Sie im Skriptum oder unter „Links“ auf quanten.at.)
- Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert  $\hbar/2$  für die Observable  $S_\alpha$  gemessen, wobei  $\alpha$  die Projektion des Spins auf die negative  $x$ -Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von  $S_z$  und (ii) von  $S_x$  am zweiten Elektron erwarten?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive (+) Spin-Projektion zu messen, wenn die beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von  $\theta$  zueinander aufweisen (in obiger Abbildung  $\theta = \pi/2$ .) Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

*Bemerkung:* Ihre Ergebnisse in den obigen Punkten illustrieren mehrere der fundamentalen Eigenschaften der Quantentheorie: Dass durch den Kollaps der Wellenfunktion bei der Messung an einem der beiden Teilchen auch der Zustand des anderen Teilchens festgelegt wird - selbst wenn sich dieses räumlich weit entfernt

aufhält - ist eine Konsequenz der quantenmechanischen "Nichtlokalität". Letztere folgt wiederum aus dem Superpositionsprinzip und der probabilistischen Naturbeschreibung durch die Quantentheorie. Der Umstand, dass der Messwert am zweiten Teilchen durch die Art der Messung am ersten Teilchen (wie z.B. die Projektionsachse bei der Spin-Messung) mitbeeinflusst wird, wird als "Quanten-Kontextualität" bezeichnet. Beide dieser Eigenschaften sind aus der klassischen Physik vollkommen unbekannt und haben bei der Entwicklung der Quantenmechanik zu zahlreichen Diskussionen geführt. Unter anderem wies z.B. Einstein darauf hin, dass die Korrelationen zwischen den beiden räumlich getrennten Elektronen nur durch eine "spukhafte Fernwirkung" erklärt werden können. Die daraus gezogene Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie keine vollständige Theorie sei, sondern noch zusätzliche "verborgene Parameter" beinhalte, ließ sich jedoch mittlerweile im Experiment widerlegen. Was Einstein jedoch beruhigt haben dürfte, ist der Umstand dass durch die instantane "Fernwirkung" zwischen den beiden Elektronen keine Information übertragen werden kann und somit das Kausalitätsgesetz der speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird.

Zu kreuzen: 1,2,3