Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi , Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch , DI T. Ribic

# 5. Übung zur Quantenmechanik I

*Wintersemester 2016/2017*

**TUTORIUM: Freitag, 11.11.2016**.

## 10. Rattling Modes 2

*1+2+2=5 Punkte*

In Clathraten sind einzelne Atome in einer Art Käfig eingeschlossen. Moderne Thermoelektrika gehören häufig zu dieser Klasse Materialien. Wir betrachten die Auswirkung eines plötzlich angelegten elektrischen Feldes auf ein derartig eingesperrtes Atom. Da das Atom eine Ladung hat und das elektrische Feld $E$ lokal als konstant angenommen werden kann, erhalten wir einen Potential-Term als Beitrag zur Energie, der linear im Ort ist. Der Einfachheit halber untersuchen wir nur eine Dimension. Gehen Sie dafür von dem Hamilton-Operator für einen harmonischen Oszilator mit einem linearen Störterm aus.

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + 1/2\right) + \frac{x_0}{\sqrt{2}} E\, q \left(a^\dagger + a\right) \tag{1}$$

**a)** Schreiben Sie den Hamilton-Operator explizit im Ortsraum an. Überlegen Sie, wie die Eigenfunktionen zu dem entstehenden Problem lauten müssen und geben Sie die entsprechenden Energieeigenwerte an.

**b)** Der Operator der Translation (Verschiebung) ist gegeben durch

$$T_\Delta = e^{\Delta\, d/dx} \tag{2}$$

mit einer Konstanten $\Delta$. Die Exponentialfunktion eines Operators ist durch die entsprechende Reihendarstellung definiert. Zeigen Sie, dass gilt:

$$T_\Delta f(x) = f(x + \Delta). \tag{3}$$

Bestimmen Sie, für welchen Wert von $\Delta$ gilt:

$$T_{-\Delta} H T_\Delta = \hbar\omega \left(a^\dagger a + 1/2\right) + K \tag{4}$$

Mit einer additiven Konstante $K$. Vergleichen Sie mit den Resultaten aus **a)**, was fällt Ihnen an den Werten von $\Delta$ und $K$ auf?

**c)** Angenommen, zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand des ungestörten Harmonischen Oszillators mit dem Hamilton-Operator

$$H_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + 1/2\right), \tag{5}$$

woraufhin plötzlich der lineare Störterm eingeschaltet wird. Entwickeln Sie den Grundzustand von $H_0$ in die Eigenzustände von $H$. Überlegen Sie, wie Sie mit Hilfe von Leiteroperatoren und dem Operator $T$ vorgehen können. Sie dürfen sich dabei auf Terme bis zur Ordnung $(E)^2$ beschränken.

## 11. Kohärente Zustände

*1+1+2+1=5 Punkte*

Betrachten Sie die sogenannten kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators $\Phi_\alpha$:

$$\Phi_\alpha(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\alpha a^\dagger\right)^n \Psi_0(x) \tag{6}$$

**a)** Zeigen Sie, dass diese Zustände sinnvoll als

$$\Phi_\alpha(x) = C e^{\left(\alpha a^\dagger\right)} \Psi_0(x) \tag{7}$$

notiert werden können und verifizieren Sie, dass es sich tatsächlich um Eigenzustände zum Operator $a$ handelt.

**b)** Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C$.

**c)** Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im kohärenten Zustand $\Phi_\alpha$ ($\alpha$ ist als bekannt anzunehmen). Berechnen Sie die **zeitabhängigen** Erwartungswerte der Operatoren

$$p, p^2, x^2, H.$$

(Tipp: Überlegen Sie, ob eine explizite Rechnung im Ortsraum wirklich notwendig ist.)

**d)** Gehen Sie (ohne Beweis) von der zeitabhängigen Ortsdarstellung der Wellenfunktion eines Kohärenten Zustandes aus:

$$\Phi_\alpha(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)(\overline{x})^2 + i\overline{k}x} \tag{8}$$

mit den Größen:

$$\overline{x} = x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \mathcal{R}(\alpha)\ ,\ \overline{k} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \mathcal{I}(\alpha)\ ,$$

Dabei bezeichnen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{I}$ Real- und Imaginärteil der zeitabhängigen Variable $\alpha$. Ist es Ihnen damit möglich, die zeitabhängige Wellenfunktion für das Problem der Rattling modes **10 c)** auf eine alternative Art explizit anzugeben? Wie müssen gegebenenfalls welche Parameter gewählt werden? Wie verhält sich $\alpha$ als Funktion der Zeit?