

## Aufgabenblatt 3

### 8 Kommutatoren

- a) Beweisen Sie folgende Kommutatorregeln für allgemeine lineare Operatoren bzw.  $N \times N$  Matrizen  $A, B, C$ , der Identität  $\mathbf{1}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$[A, A] = 0 \quad (1)$$

$$[aA, bB] = ab[A, B] \quad (2)$$

$$[A, B] = -[B, A] \quad (3)$$

$$[A, \mathbf{1}] = [\mathbf{1}, A] = 0 \quad (4)$$

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C] \quad (5)$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (6)$$

$$0 = [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] \quad (7)$$

- b) Berechnen sie den Kommutator  $[R_x, R_z]$  der Rotationsmatrizen

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Unter welchen Bedingungen gilt  $[R_x, R_z] = 0$ ?

- c) Wir betrachten den Ableitungsoperator  $\mathcal{O}_1 = -i\frac{d}{dx}$  und den Multiplikationsoperator  $\mathcal{O}_2 = x$ , welche auf differenzierbare Funktionen der Gestalt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  wirken:  $\mathcal{O}_1 f(x) = -if'(x)$  und  $\mathcal{O}_2 f(x) = xf(x)$ . Berechnen sie den Kommutator  $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$  indem sie ihn auf eine beliebige differenzierbare Funktion anwenden. Berechnen sie den Kommutatoren  $[\mathcal{O}_1^2, \mathcal{O}_2]$  und  $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2^2]$  in dem sie die Ergebnisse von a) ausnutzen.

(ab)+(c) = 2 Kreuze

### 9 Eigenvektoren und Eigenwerte hermitescher Operatoren

Wir betrachten die Eigenwertgleichung (zeitunabhängige Schrödingergleichung)

$$H|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

wobei  $H$  ein hermitescher Hamiltonoperator mit den diskreten Eigenwerten  $E_i$  und Eigenvektoren  $|\psi_i\rangle$  ist. Wir nehmen an, dass die Eigenvektoren normiert sind:  $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$ .

- a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte  $E_i$  reell sind.
- b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind:  $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$ , wenn  $E_i \neq E_j$ .

c) Der adjungierte Operator  $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger$  ist implizit über

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger \psi(x) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(\frac{d}{dx}\right) \phi(x) \right]^* \quad (10)$$

für alle komplexwertigen und stetig differenzierbare Funktionen  $\psi(x), \phi(x)$  definiert, wobei wir annehmen, dass diese Funktionen im Unendlichen auf 0 abfallen. Zeigen Sie, dass  $\frac{d}{dx}$  nicht hermitesch ist, indem Sie beweisen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx} \neq \frac{d}{dx} . \quad (11)$$

(ab)+(c) = 2 Kreuze

## 10 Stabilisierung des Grundzustandes

Wir betrachten den Hamiltonoperator  $H$  aus einem 2-dimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,

$$H = A_1|0\rangle\langle 0| + V|0\rangle\langle 1| + V^*|1\rangle\langle 0| + A_2|1\rangle\langle 1| , \quad (12)$$

wobei  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ ,  $A_1 < A_2$  und  $V \in \mathbb{C}$ .

- Beweisen Sie, dass  $H$  hermitesch ist und finden sie den Grundzustand (niedrigster Eigenwert) und den angeregten Zustand (nächst höherer Eigenwert) für den Fall  $V = 0$ .
- Zeigen Sie, dass  $V \neq 0$  den Grundzustand stabilisiert, d.h. der Betrag der Differenz zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand nimmt mit wachsendem  $|V|$  zu.

1 Kreuz