Aufgabenblatt 4

Für dieses Blatt haben Sie 2 Wochen Zeit. Deadline für die Kreuzer ist am 07.11.19 um 23:59 Uhr.

11 Asymmetrischer Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m lebt in einem eindimensionalen asymmetrischen Potentialtopf,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{Fall I:} \quad x \leq 0 \\ -V_0 & \text{Fall II:} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ 0 & \text{Fall III:} \quad x > x_0 \end{cases} \tag{1}$$

wobei hier $V_0 > 0$ und $x_0 > 0$.

a) Skizzieren Sie das Potential und schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für alle drei Fälle separat auf. Bringen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für jeden Fall in die Form:

$$\psi_i''(x) + \kappa_i^2 \psi_i(x) = 0 \ , \quad i = \text{I, II, III} \ , \tag{2}$$

und bestimmen Sie die (i.A.) komplexe Zahl κ_i.

b) Verwenden Sie für II und III den Ansatz

$$\psi_i(x) = A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x} \ , \quad i = \text{II, III} \tag{3}$$

und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen k_i und κ_i. Welchen Ansatz müssen wir für den Fall I wählen?

c) Welches Kriterium erfüllen gebunden Zustände? Ist k_i (i = II, III) für gebundene Zustände reell oder imaginär?

d) Zeigen Sie, dass für gebunden Zustände folgende Beziehung zwischen m, x_0 und V_0 gelten muss:

$$\frac{4}{\pi^2} V_0 x_0^2 > \frac{\hbar^2}{2m} \ . \tag{4}$$

D.h. das Potential muss tief und breit genug sein, damit es für gegebenes m überhaupt binden kann. Tipp: Die Ungleichung folgt aus den Stetigkeitsbedingungen zwischen den Bereichen II und III.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

12 Funktionen von Operatoren

a) Beweisen Sie für einen linearen Operator A die Identität,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha A} = \cos(\alpha A) + \mathrm{i}\sin(\alpha A) \ , \tag{5}$$

und

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha A} = \mathbb{1}\cos(\alpha) + \mathrm{i}A\sin(\alpha) \ , \tag{6}$$

für den Spezialfall $A^2 = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ der Einheitsoperator ist und $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Welche Bedingung muss für den Kommutator $[A, B]$ zweier linearer Operatoren A, B gelten, damit die Gleichung

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{A+B} \tag{7}$$

gültig ist?

c) Es gelte $[A, B] = c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Kommutatorrelation

$$[A, B^n] = ncB^{n-1} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ , \quad n \geq 1 \ . \tag{8}$$

d) Es gelte wieder $[A, B] = c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Beweise Sie die Kommutatorrelation

$$[A, f(A, B)] = c\frac{\partial f}{\partial B} \tag{9}$$

für beliebige Polynome

$$f(A, B) = \sum_{n=1}^{N} (a_n A^n + b_n B^n) \tag{10}$$

mithilfe von c).

1 Kreuz

13 Der unitäre Zeitentwicklungsoperator

Betrachten Sie die folgende Operator-Differentialgleichung für den *unitären Zeitenwicklungsoperator*,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = HU(t, t_0) \ , \tag{11}$$

wobei H ein Hamiltonoperator ist, der im Allgemeinen ebenfalls zeitabhängig sein kann.

a) Zeigen Sie, dass

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{12}$$

eine Lösung ist, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt. Warum gilt diese einfache Lösung nicht, wenn H zeitabhängig ist?

b) Zeigen Sie, dass $U(t, t_0)$ aus Gleichung (12) ein unitärer Operator ist.

c) Berechnen Sie $U(t, t_0)$ für den Fall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators mit diskretem Eigenwertspektrum,

$$H = \sum_n E_n \, |n\rangle\langle n| \, . \tag{13}$$

d) Der Zustand eines Quantensystems mit zeitunabhängigem Hamiltonoperator sei zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch $|\phi\rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass damit der Zustand für alle Zeiten t durch

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\phi\rangle \tag{14}$$

determiniert ist, d.h. die zeitabhängige Schrödingergleichung löst. Bestimmen Sie außerdem die Koeffizienten $c_n(t, t_0)$ in

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t, t_0) \, |n\rangle \, , \tag{15}$$

wenn $|n\rangle$ die diskreten Energie-Eigenzustände von H sind.

1 Kreuz

14 Der eindimensionale harmonische Oszillator in der Quantenmechanik

a) Der harmonische Oszillator ist eines der wenigen quantenmechanischen Systeme, für welches die Schrödingergleichung analytisch lösbar ist. Nennen Sie mindestens zwei konkrete Beispiele der Physik, wo der quantenmechanische harmonische Oszillator Anwendung findet.

b) Schreibe den Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators wie in der Vorlesung mithilfe des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators $a^\dagger$ und a auf. Drücke $a^\dagger$ und a mithilfe des Orts- und Impulsoperators X und P aus.

c) Drücken Sie den Operator der kinetischen Energie T und des harmonischen Potentials V mithilfe von $a^\dagger$ und a aus. Beweisen Sie den Virialsatz,

$$\langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle \, , \tag{16}$$

wobei $|n\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist.

d) Wir betrachten einen sogenannten *kohärenten Zustand*

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle \tag{17}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\alpha|N|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|H|\alpha\rangle$, wobei $N = a^\dagger a$ der Besetzungszahloperator ist. Ist $|\alpha\rangle$ ein Energieeigenzustand?

1 Kreuz