Aufgabenblatt 9

26 Wasserstoffatom

Wir betrachten die Eigenzustände $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ des Wasserstoff-Hamiltonians.

a) Berechnen Sie die Größen

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, r^2 \, |\psi_{100}(r,\theta,\varphi)|^2 \tag{1}$$

$$B(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_0^{r} \mathrm{d}\rho \, \rho^2 \, |\psi_{100}(\rho,\theta,\varphi)|^2 \tag{2}$$

$$C = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}r \, r^3 \, |\psi_{100}(r,\theta,\varphi)|^2 \tag{3}$$

Skizzieren Sie $A(r)$ und $B(r)$. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Größen?

b) Berechnen Sie für den Grundzustand die Wahrscheinlichkeit das Elektron (i) im Atomkern, (ii) höchstens mit dem Abstand a_0 vom Atomkern entfernt, (iii) mindestens einen Millimeter vom Atomkern entfern zu messen? Nehmen Sie dabei einen Protonenradius von $R = 1.6 \cdot 10^{-5} a_0$ an.

c) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass die Zustände $\psi_{100}(\boldsymbol{r})$ und $\psi_{200}(\boldsymbol{r})$ orthogonal sind.

d) Die Wellenfunktion kann als Grundlage zur Berechnung der mittleren Ladungsdichte des Elektrons herangezogen werden. Berechnen Sie das mittlere elektrische Potential $\varphi(\boldsymbol{r})$ eines Wasserstoffatoms im Grundzustand (Elektron + Kern) über die Poisson-Gleichung. Nehmen Sie dabei die Ladung des Kerns als Punktladung an. Verwenden Sie zur Lösung der Poisson-Gleichung den Ansatz $\varphi(\boldsymbol{r}) = \chi(r)/r$ und finden Sie zuerst eine Lösung für $\chi(r)$. Verwenden Sie die Randbedingungen $\chi(r \to \infty) = 0$ und $\chi'(r \to \infty) = 0$.

(abc)+(d) = 2 Kreuze

27 "Normaler" Zeeman-Effekt

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem schwachen Magnetfeld in z-Richtung. Zeigen Sie, dass der Hamiltonian geschrieben werden kann als

$$H = H_{\text{H-atom}} + \omega L_z \,, \qquad \omega = \frac{eB}{2m} \,, \tag{4}$$

wobei alle Terme ab der Ordnung $\mathcal{O}(B^2)$ vernachlässigt werden. Zeigen Sie, dass die Eigenzustände $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ des Wasserstoff-Hamiltonians $H_{\text{H-atom}}$ (aus der Vorlesung) auch die Eigenzustände von H sind. Bestimmen Sie die Eigenenergien von H. Vernachlässigen Sie den Spin.

1 Kreuz