

### 3. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. Betrachten Sie ein System mit  $N$  Spin-1/2 Teilchen in einem magnetischen Feld  $B$ . Die freie Enthalpie im Nichtgleichgewichtszustand ist gegeben durch

$$G = a_4 m^4 + J \left( 1 - \frac{J}{k_B T} \right) m^2 + a_0(T) - Bm$$

wobei  $J(> 0)$  und  $a_4(> 0)$  Konstante sind und  $T$  die Temperatur. Die mittlere Magnetisierung  $m$  ist der Ordnungsparameter.

- (a) Das System zeigt einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Bestimmen Sie die kritische Temperatur  $T_c$  in den Fall ohne Magnetfeld ( $B = 0$ ). Zeichnen Sie die Magnetisierung  $m$  im Gleichgewichtszustand als eine Funktion der Temperatur  $T$ .
  - (b) In schwachen Magnetfeldern weicht die Magnetisierung  $m(B)$  im Gleichgewicht von  $m(B = 0)$  (das Ergebnis aus dem Bsp.1a) ab. Finden Sie die Näherung der Magnetisierung  $m(B)$  bis zur ersten Ordnung in  $B$  wenn  $T > T_c$  sowie  $T < T_c$ .
2. Die freie Enthalpie  $G$  eines Systems ist gegeben durch

$$G(\eta, T) = 2\eta^6 - 3(\eta_1^2 + \eta_2^2)\eta^4 + 6\eta_1^2\eta_2^2\eta^2 + G_0.$$

$\eta_1$  und  $\eta_2$  sind Funktionen von  $T$  und erfüllen die Bedingungen  $\eta_1(T) > \eta_2(T) > 0$ . Nehmen Sie an, dass das System einen Phasenübergang erster Ordnung zeigt.

- (a) Zeigen Sie, dass bei der kritischen Temperatur  $T_c$

$$\eta_1 = \sqrt{3}\eta_2.$$

- (b) Schreiben Sie die freie Enthalpie  $G$  im Gleichgewichtszustand bei  $T > T_c$  und bei  $T < T_c$  an. Nehmen Sie an, dass  $\eta_1 > \sqrt{3}\eta_2$  wenn  $T < T_c$  und  $\eta_1 < \sqrt{3}\eta_2$  wenn  $T > T_c$ .