

Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 9

26. Relativistische Bosonen

Betrachten Sie ein Gas aus Bosonen in einem Behälter mit Volumen V , Spin $S = 0$ und relativistischer Dispersionsrelation

$$E_{\vec{k}} = \hbar c |\vec{k}|. \quad (1)$$

- (a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$.
- (b) Berechnen Sie die Zustandsgleichung für die Teilchenzahl $N(T, V, z)$ und daraus die Kondensatontemperatur T_c für ein relativistisches Bosegas.
- (c) Berechnen Sie die thermische Zustandsgleichung für den Druck $p(T, V, z)$ eines relativistischen Bosegases und bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit von p für $T < T_c$.
- (d) Betrachten Sie den klassischen Grenzfall des relativistischen Bosegases, $\varepsilon = n(\beta\hbar c)^3 \ll 1$ mit $n = N/V$. Welche physikalische Bedeutung hat ε ? Zeigen Sie, dass die thermische Zustandsgleichung in diesem Limes als

$$pV = Nk_B T (1 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \dots) \quad (2)$$

geschrieben werden kann und berechnen Sie die numerischen Koeffizienten c_1 und c_2 für die ersten beiden Korrekturterme. *Hinweis:* Benützen Sie den Ansatz $z = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 \dots$ und lösen Sie die auftretenden Gleichungen iterativ durch Vergleich der Potenzen von ε^n auf.

27. Photonengas

Ein Photonengas in einem Hohlraum mit Volumen V wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\text{EM}} = \sum_k \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger a_k, \quad k \equiv (\lambda, \vec{k}), \quad (3)$$

beschrieben, woraus sich die freie Energie

$$F(T, V) = -\frac{4\sigma}{3c} VT^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}, \quad (4)$$

(σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) ableiten lässt (siehe Vorlesung).

- (a) Berechnen Sie, ausgehend von $F(T, V)$, den Druck, die Entropie und die innere Energie des Photonengases und zeigen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation, dass $\mu = 0$.
- (b) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl $N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle$ und zeigen Sie, dass für ein Photonengas

$$pV \approx 0.90 \times Nk_B T. \quad (5)$$

Kreuze für: 26a); 26b); 26c); 26d); 27a); 27b)