Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 7

20. Zustandsdichte eines Rotors

Die Rotation eines starren Körpers mit Trägheitsmoment I wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{B}{\hbar^2}\hat{\vec{L}}^2, \tag{1}$$

mit Rotationskonstante $B = \hbar^2/(2I)$ beschrieben. $\hat{\vec{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ bezeichnet den Drehimpulsoperator mit Eigenwertgleichungen

$$\hat{\vec{L}}^2|l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m_l\rangle, \qquad \hat{L}_z|l, m_l\rangle = \hbar m_l|l, m_l\rangle, \tag{2}$$

wobei $l = 0, 1, 2, ...$ und $m_l = -l, -l+1, \ldots, l$. Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ der Energieniveaus eines starren Rotors näherungsweise für $E \gg B$.

21. Neutronenstern

Ein Neutronenstern besteht aus einem entarteten Gas aus N Neutronen, der rein durch den Entartungsdruck gegen den gravitativen Kollaps stabilsiert wird. Unter der vereinfachten Annahme eines kugelförmigen Sterns mit Volumen $V = 4\pi R^3/3$ und einer homogenen Dichte $n = N/V$ ist die Gesamtenergie des Neutronensterns durch

$$U_{\text{ges}}(R) = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} + U_n(R) \tag{3}$$

gegeben, wobei $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Neutronensterns bezeichnet. Die Neutronen können nicht-relativistisch behandelt werden und die Energie $U_n(R)$ des Neutronengases kann daher durch die Grundzustandsenergie eines idealen Fermigases mit Masse $m_n \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg und Spin $S = 1/2$ approximiert werden (siehe Vorlesung). Berechnen Sie durch Minimieren der Gesamtenergie den Radius R eines Neutronensterns mit der Masse der Sonne, $M = M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

Bemerkung. Aus einer vollständigen relativistischen Beschreibung dieses Problems ergibt sich eine maximale Masse $M_C \approx 1.4\,M_\odot$, oberhalb derer auch der Entartungdruck nicht mehr ausreicht, um einen Neutronenstern zu stabilisieren $\to$ schwarzes Loch.

22. Ultrarelativistisches Fermi Gas

Betrachten Sie ein 3D ultrarelativistisches Gas aus N Fermionen mit Spin $S = 1/2$ und Energiedispersionsrelation

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{c^2\hbar^2|\vec{k}|^2 + m^2c^4} \approx c\hbar|\vec{k}|. \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ für gegebenes Volumen V.

(b) Berechnen Sie die Fermienergie E_F eines ultrarelativistischen Fermi Gases als Funktion der Teilchendichte $n = N/V$.

(c) Drücken Sie die Teilchendichte n und das großkanonische Potential $J(T, V, \mu)$ durch Fermi-Integrale $f_\alpha(z)$ aus, wobei $z = e^{\beta\mu}$. Zeigen Sie, dass für ein ultrarelativistisches Fermi Gas der allgemeine Zusammenhang

$$U = 3pV \tag{5}$$

(für alle Temperaturen) gilt und berechnen Sie $U(T = 0)$ bzw. $p(T = 0)$.

(d) Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung $p(T)$ für das ultrarelativistische Fermi Gas im klassischen Grenzfall $z \to 0$ und berechnen Sie die Korrekturen, die durch den Entartungsdruck entstehen. Was ist der Entartungparameter für ein relativistisches Gas?

23. Spin-1/2 Fermionen im magnetischen Feld

Betrachten Sie N nichtwechselwirkenden Fermionen mit Spin $S = 1/2$ im Volumen V. Im Gegensatz zur Vorlesung soll hier die Energieaufspaltung der Spinzustände mit $m_s = \pm 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B berücksichtigt werden. D.h.

$$E_{\vec{k},m_s} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + 2\mu_B B m_s, \tag{6}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magenton bezeichnet. Berechnen Sie für $T = 0$ und unter der Annahme $\mu_B B \ll E_F$ die Magentisierung $M(B) = \mu_B(N_+ - N_-)$, wobei N_+ und N_- die Zahl der Fermionen in den Spinzuständen $m_s = \mp 1/2$ bezeichnen. Verwenden Sie dazu, dass $|N_+ - N_-| \ll N_+ + N_- = N$.

Kreuze für: 20; 21; 22a+b); 22c); 22d); 23