

Nachtest zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Test A	Name:	Matrikelnummer:	A1	A2	A3	A4	Σ
			10	7	7	6+2*	30+2*

1. Theorieaufgaben

3+3.5+3.5=10 Punkte

- a) Ein unpolarisierter Strahl Spin-1/2-Teilchen trifft auf einen Sterngerlachapparat, der den Spin in x Richtung misst. Geben Sie in Spin- z -Basis(!) die Dichtematrix für den Spinanteil vor und nach der Messung mit Messergebnis $S_x = -\hbar/2$ an. Nach der Messung propagiert der Strahl eine Zeit Δt durch ein Magnetfeld B_x in x -Richtung. Wie lautet die Dichtematrix nach dieser Zeit Δt ?
- b) Welche der folgenden Operatoren kommutieren mit der Dirac-Glg. (jeweils mit Beweis, $\vec{\sigma}$ ist der Vektor der drei Paulimatrizen)?

$$(a) \text{ Drehimpuls } \vec{L}^2, \quad (b) \text{ Spin } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (c) \vec{\Sigma}^2 .$$

- c) Zur Beschreibung der Supraleitung kann man die Bogoliubov-Transformation der elektronischen Erzeugungs- ($a_{\vec{k}}^\dagger$) und Vernichtungsoperatoren ($a_{\vec{k}}$) zum Wellenvektor $\vec{k} \neq \vec{0}$ verwenden:

$$\begin{aligned} b_{\vec{k}}^\dagger &= u a_{\vec{k}}^\dagger - v a_{-\vec{k}} & , & \quad b_{\vec{k}} = u^* a_{\vec{k}} - v^* a_{-\vec{k}}^\dagger \\ b_{-\vec{k}} &= v a_{\vec{k}}^\dagger + u a_{-\vec{k}} & , & \quad b_{-\vec{k}}^\dagger = v^* a_{\vec{k}} + u^* a_{-\vec{k}}^\dagger . \end{aligned}$$

Hierbei seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $|u|^2 + |v|^2 = 1$ und $uv^* - u^*v = 0$.

Zeigen Sie, dass $b_{\vec{k}}^\dagger, b_{\vec{k}}$ fermionische Operatoren sind, d.h. die entsprechenden Kommutatorrelationen erfüllen.

2. Streuung am Zentralpotential

4+1+2=7 Punkte

Ein Teilchen der Masse m wird an einem (dreidimensionalen) Zentralpotential der Form

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} \tag{1}$$

gestreut.

Hinweise: • $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \pi$ • $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

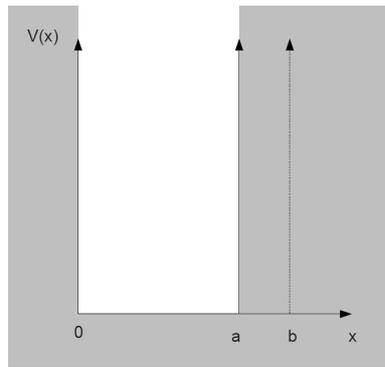
- a) Berechnen Sie in *erster* Bornscher Näherung die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ des Teilchens an obigem Potential.
- b) Berechnen Sie, ausgehend von **a**), den differentiellen Wirkungsquerschnitt dieser Streuung.

- c) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt? Wie kann man dieses Ergebnis im Zusammenhang mit der Bornschen Reihe und der Form des Potentials interpretieren?

3. Plötzliche Potentialveränderung

2+1+4=7 Punkte

Ein Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Grundzustand eines unendlich hohen, eindimensionalen Potentialwalls der Breite a (siehe untenstehende Abb.). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird dessen rechte Wand plötzlich (innerhalb eines Zeitraums τ) zum Punkt $b > a$ verschoben.



- a) Geben Sie den alten und den neuen Hamiltonoperator des obigen Systems an. Wie lauten deren Eigenfunktionen?
- b) Welche Näherung können Sie anwenden, um die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in den jeweiligen Zuständen des neuen Hamiltonoperators zu finden, zu berechnen? Wann ist diese Näherung gültig (mathematischer Ausdruck)?
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen in den jeweiligen Zuständen des neuen Hamiltonoperators zu finden.

Hinweise:

$$\bullet \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \bullet \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

4. Dichte zweier bosonischer Teilchen

2+4+2* = 6+2* Punkte

Zwei identische bosonische Teilchen mit Spin 0 besetzen zwei Zustände, die von den normierten (aber nicht orthogonalen) Wellenfunktionen $\psi_1(\mathbf{r})$ bzw. $\psi_2(\mathbf{r})$ beschrieben sind.

- a) Geben Sie die normierte Wellenfunktion der zwei Teilchen an.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Dichte-Operators der zwei Teilchen, d.h. $\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem entsprechenden Resultat für zwei *nicht* identische Teilchen. Wie kann man diesen Vergleich interpretieren, z.B. in der Region, wo es einen Überlapp zwischen $\psi_1(\mathbf{r})$ und $\psi_2(\mathbf{r})$ gibt?
- c) *Bonusaufgabe:* Welcher Unterschied ist für zwei *Fermionen* zu erwarten, wenn beide Teilchen Spin $S = \frac{1}{2}$ und $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ haben?

Viel Erfolg!