

## 4. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 29.11.2013

### 1. Auswahlregeln

Das Valenzelektron eines Atoms werde durch Absorption eines Photons mit Wellenzahl  $\vec{k}$  und mit Polarisationsvektor  $\vec{e} \perp \vec{k}$  vom Zustand  $|i\rangle \equiv |n l m_l s m_s\rangle$  in einen angeregten Zustand  $|f\rangle \equiv |n' l' m'_l s m'_s\rangle$  gehoben. Nehmen Sie nun an, bei dem entsprechenden Anregungsprozess handle es sich um einen elektrischen Dipolübergang. In diesem Fall wird die Übergangswahrscheinlichkeit durch folgendes Matrixelement mit dem Dipoloperator  $\vec{D}$  bestimmt:  $|\langle f | \vec{e} \cdot \vec{D} | i \rangle|^2$ . Zeigen Sie auf dieser Basis, dass für die in Frage kommenden Dipolübergänge folgende Auswahlregeln gelten:  $\Delta l \equiv l' - l = \pm 1$ ,  $\Delta m_l \equiv m'_l - m_l = 0, \pm 1$ ,  $\Delta m_s \equiv m'_s - m_s = 0$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Ableitung das Wigner-Eckart-Theorem, sowie Überlegungen zur Parität der auftretenden Wellenfunktionen. Weiters gilt folgende Identität für das Skalarprodukt zweier Vektoroperatoren:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \sum_{q=-1}^1 (-1)^q A_q^1 B_{-q}^1$  (wobei  $A_q^1, B_q^1$  die sphärischen Komponenten der Vektoroperatoren sind).

### 2. Quadrupolmoment

In der Elektrostatik kann man eine Ladungsverteilung in Multipolmomente entwickeln, von welchen wir uns in diesem Beispiel speziell mit dem Quadrupolmoment beschäftigen wollen. Betrachten Sie im Folgenden die  $Q_0^2$ -Komponente des Quadrupoltensors,

$$Q_0^2 = e(3z^2 - r^2) = 2e\sqrt{\frac{4\pi}{5}}r^2Y_2^0(\theta, \phi), \quad (1)$$

welche bei Experimenten mit einer Zylindersymmetrie bzgl. der  $z$ -Achse eine Rolle spielt. Um das elektrische Quadrupolmoment des Wasserstoff-Atoms zu erhalten, soll nun der Erwartungswert dieses Operators für die Atomzustände  $|n, l, 1/2, j, m_j = j\rangle$  ausgewertet werden. Berechnen Sie diesen Erwartungswert konkret für die Zustände mit folgenden Quantenzahlen:  $n = 2, l = 1$  und  $j = 1/2$  bzw.  $j = 3/2$ .

*Hinweis:* Um gegebenenfalls Rechenarbeit einzusparen, ist es empfehlenswert, zunächst mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems zu untersuchen, ob die beteiligten Drehimpulsquantenzahlen überhaupt einen von Null verschiedenen Erwartungswert zulassen. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Integrale folgende Identität:  $\int_0^\infty d\rho \rho^\alpha e^{-\rho} = \alpha!$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$

### 3. Kramers Theorem

- (a) Betrachten Sie ein quantenmechanisches System im Zustand  $|\psi\rangle$ . Eine zweimalige Anwendung des Zeitumkehroperators  $\hat{T}$  darf per definitionem physikalisch keine Auswirkung haben, weswegen  $\hat{T}^2|\psi\rangle = c|\psi\rangle$  mit  $|c| = 1$  gilt. Zeigen Sie für beliebiges  $|\psi\rangle$ , dass  $c$  nur die Werte  $\pm 1$  annehmen kann.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Wirkung von  $\hat{T}^2$  auf den Zustand  $|\psi\rangle + \hat{T}|\psi\rangle$ .

- (b) Argumentieren Sie nun, warum in einem System mit ungerader Anzahl von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (das heißt halbzahligem Gesamtspin) die Eigenwerte  $c$  von  $\hat{T}^2$  immer den Wert  $c = -1$  annehmen.

*Hinweis: Bringen Sie  $\hat{T}^2$  mit dem in der Vorlesung vorgestellten Rotationsoperator  $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  in Verbindung.*

- (c) Beweisen Sie nun das Kramers-Theorem, demzufolge ein System mit Zeitumkehr-Invarianz und halbzahligem Gesamtspin nur Eigenwerte besitzt, die mindestens zweifach entartet sind.
- (d) Argumentieren Sie, warum im Allgemeinen der Grad der Entartung für derartige Systeme geradzahlig sein muss. Zeigen Sie explizit, dass dreifache Entartung nicht möglich ist.
- (e) Betrachten Sie das Elektron eines Wasserstoffatoms in einem Zustand mit Hauptquantenzahl  $n = 1$ . Laut Ihrem Beweis aus b) muss es nun zum Energieeigenwert  $E_{n=1}$  mindestens zwei entartete Zustände geben. Schreiben Sie diese an.

Zu kreuzen: 1,2,3abc,3de