

3. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 13.11.2015

1. Ein Ensemble von Wasserstoffatomen wird durch folgenden Dichteoperator in der gekoppelten Basis ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) beschrieben:

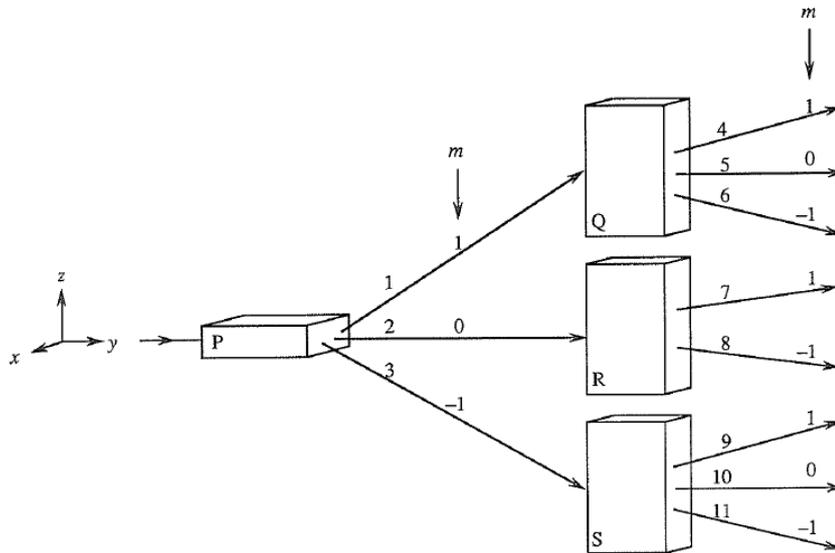
$$\rho = \sum_j \sum_{m_j} |n l \frac{1}{2} j m_j\rangle P(m_j) \langle n l \frac{1}{2} j m_j|$$

$$P(m_j) = \begin{cases} N m_j^2 & : m_j > 0 \\ 0 & : m_j \leq 0 \end{cases}$$

Alle Atome haben dieselbe Hauptquantenzahl $n \geq 2$, Drehimpuls $l = 1$ und Spin $s = 1/2$. Die Summen über j und m_j laufen über alle möglichen Werte von j bzw. m_j .

- (a) Welche Werte können j und m_j annehmen? Berechnen Sie die Normierungskonstante N .
 - (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle S_z \rangle$ der z -Komponente des Spins. Benützen Sie hierfür die Tabelle der Clebsch-Gordan-Koeffizienten, welche auf TUWEL bereitgestellt wurde.
2. Betrachten Sie ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B \hat{e}_z$ bei einer Temperatur T .
- (a) Überlegen Sie zunächst welcher Zustand für den Spin energetisch am günstigsten ist. Wie groß sind daher die Besetzungswahrscheinlichkeiten P_\uparrow (für Spin-up) und P_\downarrow (für Spin-down) im Fall $T = 0$?
 - (b) Berechnen Sie nun diese Besetzungswahrscheinlichkeiten für eine endliche Temperatur $T > 0$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.
 - (c) Berechnen Sie im nächsten Schritt den Erwartungswert $\langle \mu_z \rangle$ des magnetischen Moments in z -Richtung. Wie verhält sich dieser in den Grenzfällen $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$?
 - (d) Betrachten Sie nun ein Ensemble von N (nicht-wechselwirkenden) Spins. Welche Magnetisierung ruft das magnetische Feld bei einer Temperatur T hervor? Leiten Sie daraus für hohe Temperaturen $T \gg 1$ das Curie'sche Gesetz für die magnetische Suszeptibilität χ ab (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Curiesches_Gesetz.)
 - (e) Berechnen Sie die Unschärfe der Magnetisierung als Funktion der Temperatur T und stellen Sie diese graphisch dar.

3. Ein unpolarisierter Strahl von Spin-1-Teilchen (beschrieben durch eine Dichtematrix $\rho_{i,j} = \frac{1}{3} \delta_{i,j}$) falle in y -Richtung auf einen Stern-Gerlach-Magneten P ein, dessen Magnetfeld in x -Richtung zeigt (sh. Abbildung). Die drei Strahlen mit Quantenzahl $m = 0, \pm 1$ werden voneinander getrennt und durch drei weitere Magneten Q,R,S (mit Feld in z -Richtung) geschleust.



- (a) Wie lauten die Dichtematrizen, die jeden der drei aus P austretenden Strahlen beschreiben? Handelt es sich dabei um reine Zustände?
- (b) Wie würde die Dichtematrix für einen Teilchenstrahl lauten, der aus Verschmelzung der beiden Strahlen 1 und 2 entsteht?
- (c) Erklären Sie, in wieviele Teile sich die Strahlen an den Magneten Q,R,S aufspalten bzw. wie groß die Intensitäten der jeweiligen Teilstrahlen sind (gemessen an der Intensität des einfallenden Strahls). *Hinweis:* Drücken Sie die Eigenzustände des L_x -Operators als Superposition von L_z -Eigenzuständen aus.

Zu kreuzen: 1/2/3