4. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 27.11.2015

1. **Eulerwinkel**

   Jede beliebige Drehlage eines festen Körpers in drei Dimensionen kann mit Hilfe der Eulerwinkel beschrieben werden:

   (a) Zeigen Sie, dass die durch die drei Eulerwinkel definierte Drehung einer Wellenfunktion (sh. dazu im Skriptum Abb. 7.3 inkl. Bildunterschrift) durch den in Formel 7.17 (Skriptum) angegebenen Rotationsoperator bewerkstelligt wird. Drücken Sie zu diesem Zwecke die Drehungen um die Achsen η_1 und ζ_2 durch Drehungen um die y- und z-Achse aus.

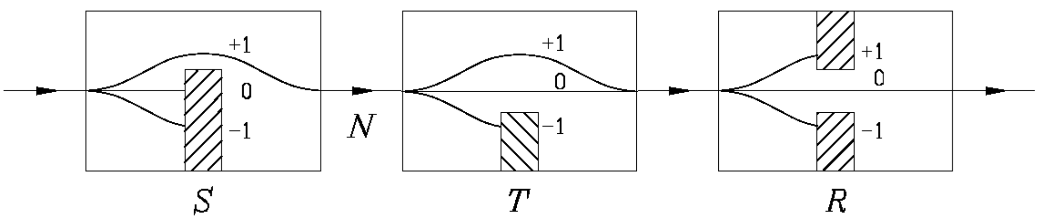
   (b) Nehmen Sie an, dass ein Drehimpuls $j_1 = 2$ mit einem Drehimpuls $j_2 = 1$ zu einem Gesamtdrehimpuls j koppelt. Wie sieht für diesen Fall die Struktur der Rotationsmatrix in der Basis aller erlaubten Gesamt-Drehimpulseigenzustände $|j\, m\rangle$ aus?

   (c) Wie können Sie mit Hilfe der Eulerwinkel eine Drehung um die x-Achse realisieren? Schreiben Sie für $j = 1$ explizit diese Rotationsmatrix an. Verwenden Sie hierfür $d^{(1)}_{m',m}$ aus dem Skriptum.

2. **Stern-Gerlach Apparat**

   Ein unpolarisierter Strahl von neutralen Spin-1 Teilchen falle in positiver x-Richtung auf die in der Abbildung dargestellte Anordnung von gekoppelten Stern-Gerlach-Apparaten ein. Dabei besitze der Stern-Gerlach-Apparat S einen Feldgradienten in positive z-Richtung bzw. R einen Feldgradienten in positive y-Richtung. Der Feldgradient des dazwischenliegenden Spin-Filters T habe ebenfalls einen Feldgradienten in der yz-Ebene, der jedoch frei in dieser Ebene variiert werden kann. Nehmen Sie nun an, dass N (Teilchen pro Sekunde) die Intensität des Strahls sei, welcher den S-Apparat verlässt. Wie muss nun der Feldgradient von T in der yz-Ebene gelegt werden, damit die Intensität des Strahls, welcher den R-Apparat verlässt, minimal wird? Wie groß ist diese minimale Intensität? Führen Sie Ihre Rechnungen sowohl mit Dichtematrizen als auch mit Wellenfunktionen durch und überprüfen Sie die Gleichheit Ihrer jeweiligen Ergebnisse. (Siehe dazu Anhang A.10 aus Übungsaufgaben Grau `http://www.dietrich-grau.at/`)

   Hinweis: Verwenden Sie die Drehmatrix, welche in Bsp. 1(c) berechnet wurde, oder adaptieren Sie die Lösung von Bsp. 2(a) des 2. Tutoriums.



3. **Sphärische Tensoroperatoren**

(a) Die sphärischen Komponenten V_q^1 eines Vektoroperators können wie folgt durch die kartesischen Komponenten ausgedrückt werden.

$$V_{\pm 1}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$$
$$V_0 = V_z$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $[J_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$ den Kommutator

$$[J_\pm, V_q^1].$$

(b) Ein sphärischer Tensor $T_q^{(k)}$ ist dadurch definiert, dass er sich unter einer Rotation um eine beliebige Achse, welche mit Hilfe des Rotationsoperators $\mathfrak{D}$ beschrieben wird, folgendermaßen transformiert:

$$\mathfrak{D}\, T_q^{(k)}\, \mathfrak{D}^\dagger = \sum_{q'=-k}^{k} \mathfrak{D}_{q'\,q}^{(k)} T_{q'}^{(k)},$$

wobei $\mathfrak{D}_{q'\,q}^{(k)}$ die Matrixelemente des Rotationsoperators sind. Zeigen Sie, dass diese Definition für infinitesimale Drehwinkel zu folgender Kommutator-Beziehung führt:

$$\left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\,T_{q\pm 1}^{(k)}$$

Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis für Vektoroperatoren mit der erhaltenen Kommutator-Beziehung aus (a) zusammenpasst.

Zu kreuzen: 1/2/3