
3. zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

PLENUM: Donnerstag, 17.11.2022.

Dichtematrix und verschränkte Zustände

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, welches aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen besteht. Mit den Spin-Operatoren $\mathbf{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ sei der Hamilton-Operator gegeben durch

$$\hat{H} = -\frac{g}{\hbar} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad (1)$$

wobei σ_i^α ($\alpha = x, y, z$) die Pauli-Matrizen für den Spin $i = 1, 2$ sind und $g \in \mathbb{R}$.

- a) Stellen Sie \hat{H} in der Basis $|J, M\rangle$ des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ dar.
- b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \equiv |\uparrow\downarrow\rangle$. Berechnen Sie die Wellenfunktionen $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$.

Ein Zustand $|\phi\rangle$ eines aus zwei (oder mehreren) Teilsystemen bestehenden Gesamtsystems wird als *verschränkt* bezeichnet, wenn er sich *nicht* als direktes Produkt von Zuständen $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$ der Teilsysteme 1 und 2 schreiben lässt, d.h. es existieren keine $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$, sodass $|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$.

- c) Zu welchen Zeiten $t \geq 0$ ist der Zustand $|\psi(t)\rangle$ aus **b)** nicht verschränkt?

Gekoppelte Spins können auch in Quantencomputern zum Einsatz kommen: Eine elementare Operation (Quantengatter) ist z.B. das Vertauschen (SWAP) einzelner Qubits.

- d) Betrachten Sie das System in der Basis der einzelnen Spins, $|1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, $|3\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$, $|4\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$. Zeigen Sie, dass für bestimmte Zeiten t^* und bis auf triviale Phasen, die Kopplung der Spins in Gl. (1) das folgende SWAP Gatter realisiert: $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\} \xrightarrow{\hat{H}} \{|1\rangle, |3\rangle, |2\rangle, |4\rangle\}$.