

13. (a) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeitsdichte (Aufenthaltswahrscheinlichkeit je Volumenelement)  $|\psi_{100}(\vec{r}, t)|^2$ .
- (b) Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit von  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  und  $t$ ?
- (c) Berechnen sie die radiale Wahrscheinlichkeitsverteilung (Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einer Kugelschale).
- (d) Bestimmen sie das Maximum der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte und zeigen sie, dass dieses dem Radius der ersten Bohrschen Bahn entspricht.
14. Spin-Bahn-Wechselwirkung
- (a) Zeigen Sie dass sich die Spinbahnwechselwirkung mit  $\ell_{\pm} = \ell_x \pm i\ell_y$  und  $s_{\pm} = s_x \pm is_y$  durch  $2\vec{\ell}\vec{s} = \ell_+s_- + \ell_-s_+ + 2\ell_zs_z$  darstellen lässt.
- (b) Berechnen Sie die Wirkung der Spinbahnwechselwirkung auf Zustände der m-Basis und auf Zustände der j-Basis. Berücksichtigen Sie dabei  $j_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|jm \pm 1\rangle$ . Sind die Zustände der m-Basis und/oder der j-Basis Eigenzustände des Spinbahnwechselwirkungsoperators?
15. Aus der Lösung der Diracgleichung, der relativistischen Wellengleichung für das Elektron im Coulombfeld eines Kernes der Ladung  $Ze_0$ , ergeben sich die Energieeigenwerte

$$E_{N'} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z\alpha_f}{N'}\right)^2}}, \quad \text{mit} \quad N' = n_r + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha_f)^2}$$

- (a) Zeigen Sie, dass eine Entwicklung nach der Feinstrukturzahl  $\alpha_f^2$  in nullter Näherung die Elektronenenergie, in erster Näherung die Bohrenergien, und in zweiter Näherung eine Feinstrukturaufspaltung der Energierterme liefert.
- (b) Welche Zustände liegen tiefer, jene mit niedrigem oder mit höheren  $j$ -Werten bei gleichem  $N'$ ?
- (c) Unter der  $H_{\beta}$  - Linie der Balmer-Serie versteht man den Übergang  $N_1 = 4 \rightarrow N_2 = 2$ . Zeichne die Feinstrukturlinien der beiden Niveaus schematisch auf, dazu die möglichen Übergänge unter Berücksichtigung der Dipolauswahlregeln.