1. Übungsblatt

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Scholz, Gernot Salzer, Robert Glowka

5. März 2015

Allgemeines

Dieses Übungsblatt enthält Aufgaben zur Aussagenlogik sowie zum ersten Teil der endlichen Automaten. Bitte beachten Sie:

- Geben Sie Ihre Lösung als **ein einziges Pdf-Dokument** (max. 5 MB) in TUWEL ab, erstellt entweder mit einem Textverarbeitungsprogramm oder mit einem Scanner aus leserlichen handschriftlichen Unterlagen. (Bitte keine Fotos; das Resultat ist weder gut leserlich noch kommen Sie mit den 5 MB aus.)
- Beachten Sie die **Abgabefrist**: Donnerstag, 19. März 2015, 23:55
- Verabsäumen Sie nicht, sich für das **Tutoren- und das Abgabegespräch** (2 Termine) in TUWEL anzumelden. Die Anmeldung wird am Tag nach der Abgabefrist für das Übungsblatt geöffnet.
- Gönnen Sie sich eine **Zeitreserve**, d.h., warten Sie nicht bis zum letzten Augenblick mit dem Hochladen der Lösungen. Mögliche Probleme in letzter Sekunde:
  - Wie erzeuge ich eine PDF-Datei aus meinem Word-Dokument oder aus meinen Zetteln?
  - Wie bekomme ich alle Seiten in eine einzige PDF-Datei?
  - Das Internet/TUWEL/der Computer funktioniert plötzlich nicht.
  - Eine falsche Datei wird hochgeladen oder die richtige unvollständig, und es ist keine Zeit mehr für eine Wiederholung.
  - Kopfschmerzen
- Verständigen Sie uns im Falle eines **Notfalls** so rasch wie möglich per E-Mail an `fmod15s@logic.at`. In der Regel erwarten wir einen Nachweis des Notfalls (etwa ärztliche Bestätigung im Fall einer Erkrankung).
- Lösen Sie die Beispiele selbständig. Wir weisen darauf hin, dass **Plagiate** mit **null Punkten** beurteilt werden. Ein Plagiat entsteht sowohl dann, wenn Sie abschreiben, als auch dann, wenn Sie abschreiben lassen.

Aufgaben

Aufgabe 1 (0.3 Punkte) Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Autos sind Fahrzeuge. Autos können nicht fliegen. Daher können Fahrzeuge nicht fliegen.

(b) Alle Primaten sind Säugetiere. Affen sind Primaten. Daher sind alle Affen Säugetiere.

(c) Siehe Cartoon rechts.[1] Von Nachahmung wird abgeraten.

Aufgabe 2 (0.4 Punkte) Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Es regnet oder es ist nass.

(b) Diese Pizza schmeckt sehr lecker.

(c) Du wirst nicht wachsen, wenn du nichts isst.

(d) Man läuft nicht mit dem Löffel im Mund.

(e) Entweder ich kaufe mir einen mp3-Player oder ein Handy (beides kann ich mir nicht leisten).

(f) Es ist kalt, es schneit, aber ich gehe trotzdem spazieren.

(g) Wenn ich mich beeile und der Bus pünktlich kommt, dann schaffe ich es noch rechtzeitig.

(h) Ich gehe nur ins Kino, wenn Max auch ins Kino geht.

Aufgabe 3 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{or}, \mathsf{xor}\}$ nicht vollständig ist.

Anmerkung: Die Begründung, dass in jedem Ausdruck immer mindestens eine Variable vorkommen muss und es daher nicht möglich ist, nullstellige Funktionen (also

[1]Family Guy, season 9, episode 8, „New Kidney in Town“

Konstante wie false) darzustellen, ist nicht ausreichend, da das nur ein Problem der gewählten Darstellung ist. Wenn Sie aber zeigen können, dass beispielsweise die einstellige konstante Funktion definiert durch $\mathsf{false}(x) = 0$ nicht darstellbar ist, ist das schlüssig.

Aufgabe 4 (0.3 Punkte) Im Bestseller *Gödel, Escher, Bach*[2] wird zur Illustration von formalen Systemen die Menge MIU eingeführt, die auch als Beispiel für induktive Definitionen dienen kann.
Die Menge MIU ist die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften. (x, y sind dabei Platzhalter für beliebige, möglicherweise auch leere Zeichenketten.)

(m1) Die Zeichenkette `MI` liegt in MIU.

(m2) Wenn $x\,\mathtt{I}$ in MIU vorkommt, dann auch $x\,\mathtt{IU}$.

(m3) Wenn $\mathtt{M}\,x$ in MIU vorkommt, dann auch $\mathtt{M}\,x\,x$.

(m4) Wenn $x\,\mathtt{III}\,y$ in MIU vorkommt, dann auch $x\,\mathtt{U}\,y$.

(m5) Wenn $x\,\mathtt{UU}\,y$ in MIU vorkommt, dann auch $x\,y$.

(a) Die Wirkung der Regel (m2) kann beschrieben werden durch „Endet ein MIU-Wort mit `I`, erhält man durch Anhängen von `U` ein weiteres MIU-Wort.“ Beschreiben Sie in ähnlicher Weise die Regeln (m3), (m4) und (m5).

(b) Geben Sie die Mengen MIU_0, MIU_1, MIU_2, MIU_3 der stufenweise Konstruktion von MIU an. (MIU_i enthält alle Zeichenketten, die mit maximal i Anwendungen der Regeln (m2) bis (m5) gebildet werden können.)

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `MIII` nicht in der Menge MIU liegen kann.

Hinweis: Kann die Anzahl der `I`s in Wörtern der Menge MIU ein Vielfaches von drei sein?

Aufgabe 5 (0.3 Punkte) Sei F die Formel $(((A \not\equiv B) \subset C) \wedge (B \equiv \neg C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 6 (0.3 Punkte) Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $((A \supset (B \not\equiv C)) \supset A)$ und $(A \not\equiv ((\neg B \vee \neg C) \wedge (B \wedge C)))$ äquivalent sind.

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

[2] Douglas R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach – an Eternal Golden Braid. Basic Books, 1979. Seit damals in vielen Sprachen und Neuauflagen erschienen. Lesenswert.

(b) durch algebraische Umformungen.

Aufgabe 7 (0.3 Punkte) Ist die Formel A eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \subset C$, $C \downarrow B$ und $A \not\equiv (B \vee C)$? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit anzeigt, dass die Konsequenzbeziehnug gilt/nicht gilt?

Aufgabe 8 (0.2 Punkte) Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Aufgabe 9 (0.2 Punkte) Sei F die Formel $(A \supset (B \downarrow C)) \vee (C \not\equiv (B \uparrow A))$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Aufgabe 10 (0.4 Punkte) Professor John Frink organisiert eine internationale Konferenz und sucht zur Unterstützung Student Volunteers. Nach zahlreichen Vorstellungsgesprächen schränkt er die Auswahl auf Bart, Janey, Lisa, Milhouse und Richard ein, wobei allerdings nur Lisa und Richard auch Fremdsprachen beherrschen. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Janey möchte ich auf jeden Fall, sie hat bei der letzten Konferenz schon erfolgreich mitgearbeitet.
- Ich kann höchstens drei Volunteers anstellen.
- Ich brauche jedenfalls mindestens einen Volunteer, der Fremdsprachen spricht.
- Richard und Milhouse kennen die Räume, in denen die Konferenz stattfinden soll. Einen der beiden sollte ich auf jeden Fall nehmen, aber beide zu nehmen ist nicht notwendig.
- Richard will nur mitmachen, wenn ich auch Bart anstelle.

- Milhouse und Lisa wollen nur gemeinsam genommen werden, da sie andernfalls zusammen auf Urlaub fahren wollen.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Wen stellt Professor Frink als Student Volunteer an? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 11 (0.4 Punkte) Der Stamm der Wakatuku wird von einer seltsamen Serie von Diebstählen heimgesucht. Der Häuptling vermutet, dass der verfeindete Nachbarstamm dafür verantwortlich ist und möchte ein paar seiner Krieger zum Spionieren in das Nachbardorf schicken. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Ich sollte mindestens zwei Krieger schicken, sonst ist das zu gefährlich.
- Flinker Fuchs und Alter Adler kann ich unmöglich gemeinsam schicken, die streiten nur wieder.
- Ich brauche mindestens einen Krieger, der gut kämpfen kann. Starker Stier, Alter Adler oder sogar beide?
- Listiger Luchs kann ich nur dann schicken, wenn ich auch Flinker Fuchs schicke.
- Wenn ich Starker Stier schicke, dann will Flinker Fuchs sicher nicht mitgehen.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Wen schickt der Häuptling der Wakatuku ins Nachbardorf? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

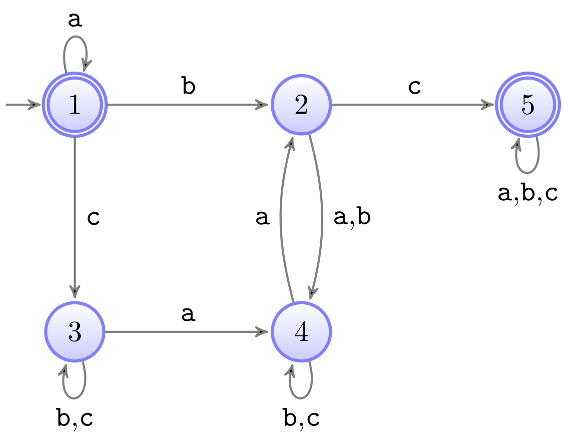
Aufgabe 12 (0.4 Punkte) SAT-Solver sind Programme, die aussagenlogische Formeln auf Erfüllbarkeit testen. Typische SAT-Solver erhalten als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform und liefern die Antwort „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.
Beispiel: Für die konjunktive Normalform $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen $I_1(A) = I_1(B) = 1$ oder $I_2(A) = I_2(B) = 0$.

(a) Wie lässt sich eine Konsequenzbeziehung $F_1, \ldots, F_n \models G$ mit Hilfe eines derartigen SAT-Solvers überprüfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) SAT-Solver liefern in der Regel nur eine einzige erfüllende Variablenbelegung. Die weiteren werden nicht ausgegeben, da das die verwendeten Verfahren nicht unterstützen. Was muss man tun, um diese dennoch mit Hilfe des SAT-Solvers berechnen zu können? Beschreiben Sie Ihre Methode und erläutern Sie sie an Hand des oben angeführten Beispiels. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Methode.

Hinweis: Überlegen Sie, wie die Eingabeformel abgeändert werden muss, um andere Variablenbelegungen als die bereits berechnete zu erhalten.

Aufgabe 13 (0.4 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `aa`, `ac`, `abc`, `bbb`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{abbac})$.

(d) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Aufgabe 14 (0.3 Punkte) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der genau jene Numerale im Ternärsystem akzeptiert, die eine durch fünf teilbare Zahl darstellen.

Numerale im Ternärsystem bestehen aus den Zeichen `0`, `1` und `2`. Beispielsweise stellt das Ternärnumeral `2102` die Zahl

$$\mathsf{2} \cdot 3^3 + \mathsf{1} \cdot 3^2 + \mathsf{0} \cdot 3^1 + \mathsf{2} \cdot 3^0 = 54 + 9 + 0 + 2 = 65$$

dar. Da 65 durch 5 teilbar ist, soll der gesuchte Automat $\mathcal{A}$ die Zeichenkette `2102` akzeptieren. Einige Wörter, die in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ vorkommen:

$$\mathsf{0}, \mathsf{00}, \mathsf{000}, \ldots, \mathsf{12}, \mathsf{012}, \mathsf{0012}, \ldots, \mathsf{101}, \mathsf{120}, \mathsf{202}, \mathsf{221}, \ldots, \mathsf{2102}, \ldots$$

Hinweis: Wenn Sie bereits den Wert eines Numerals kennen und eine weitere Ziffer anhängen, erhalten Sie den Wert des neuen Numerals, indem Sie den Wert des alten Numerals mit 3 multiplizieren und den Wert der weiteren Ziffer dazu addieren (Horner-Schema). Der Wert des Numerals `2102` kann also auch iterativ berechnet werden durch den Ausdruck $((\mathtt{2} \cdot 3 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2}$. Da wir nur an der 5-Teilbarkeit des Numerals und nicht an seinem Wert selbst interessiert sind, genügt es, während der Berechnung mit den Restklassen modulo 5 zu arbeiten. Etwa lässt sich die 5-Teilbarkeit der durch das Ternärnumeral `2102` dargestellten Zahl folgendermaßen feststellen:

$$\begin{aligned}
((\mathtt{2} \cdot 3 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} &= ((6 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&\equiv_5 ((1 + \mathtt{1}) \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= (2 \cdot 3 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= (6 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&\equiv_5 (1 + \mathtt{0}) \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= 1 \cdot 3 + \mathtt{2} \\
&= 5 \\
&\equiv_5 0
\end{aligned}$$

Die Restklasse 0 entspricht dem Rest 0 bei Division durch 5, daher ist die durch `2102` dargestellte Zahl durch 5 teilbar.

Aufgabe 15 (0.4 Punkte) Die Attraktionen eines Indoorspielplatzes werden durch Einwurf sogenannter Tokens (Plastikmünzen) bezahlt, die zuvor bei einem Automaten gekauft werden. Der Automat akzeptiert Münzen im Wert von 5, 10 und 20 Cent. Immer wenn der eingeworfene Geldbetrag 25 Cent oder mehr beträgt, gibt der Automat ein Token aus. War das Guthaben höher als 25 Cent, wird der Restbetrag auf den Kauf des nächsten Token angerechnet; Geld wird keines zurückgegeben.

Modellieren Sie den Token-Automaten durch einen Mealy-Automaten, der bei jeder eingeworfenen Münze entscheidet, ob ein Token ausgegeben (`J`) oder nicht ausgegeben (`N`) werden soll. Der Einwurf der Münzen 5 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 5 Cent und 10 Cent führt beispielsweise zur Ausgabe `NNNJNJ`.