

**VORLESUNG**  
**TECHNISCHE HYDRAULIK**  
**222.564**

# **Übungen**

**Euler Impulssatz – Bernoulligleichung – Abfluss im offenen Gerinne**

## 1. Beispiel: Euler Impulssatz



Opponitz Kraftwerk , Wien Energie, Austria

### Eingangsdaten:

- $\rho = 1000 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$
- $\mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ [kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{]}$
- $Q = 8 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$
- $D = 1 \text{ [m]}$
- $\Delta h = 115 \text{ [m]}$
- $\Delta l = 160 \text{ [m]}$
- Druckrohrleitung aus galvanisierten Stahl:  
 $k_s = 0.15 \times 10^{-3} \text{ [m]}$

Betrachten wir nochmals die Druckrohrleitung des Kraftwerk Opponitz. Betrachten wir nochmals genau TH\_PipeFlow, wo ein Durchfluss von  $Q = 8 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$  vorhanden ist, durch die teilweise Schließung des Ventiles, welches im Ende der Druckrohrleitung angeordnet ist.

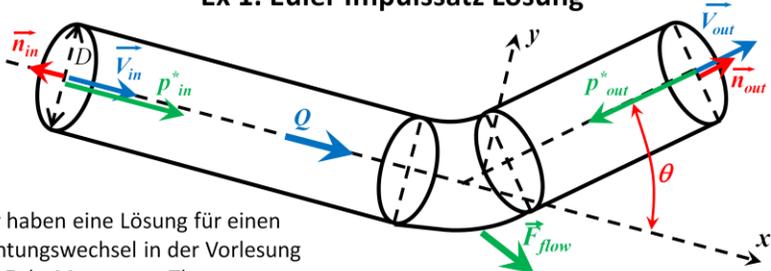
Man stelle sich nur vor, dass die Druckrohrleitung nicht gerade ist, sondern einen Richtungswechsel von  $75^\circ$  am Ende aufweist. Angenommen, die letzten  $20\text{[m]}$  der Druckrohrleitung, inclusive des Ventiles und dem Krümmer sind eben.

Berechne die Kraft, welche durch den Richtungswechsel des Flusses entsteht. Berechne die Gesamtkraft, den Verlustbeiwert der Kraft, und quer-Anteil der Kraft für 2 Konfigurationen: Erstens für die Krümmung knapp stromaufwärt des Ventils und zweitens umgekehrt. Für welche Konfiguration ist die Kraft kleiner?

2

Wir haben dieses Beispiel bereits in TH\_PipeFlow betrachtet.

### Ex 1. Euler Impulssatz Lösung

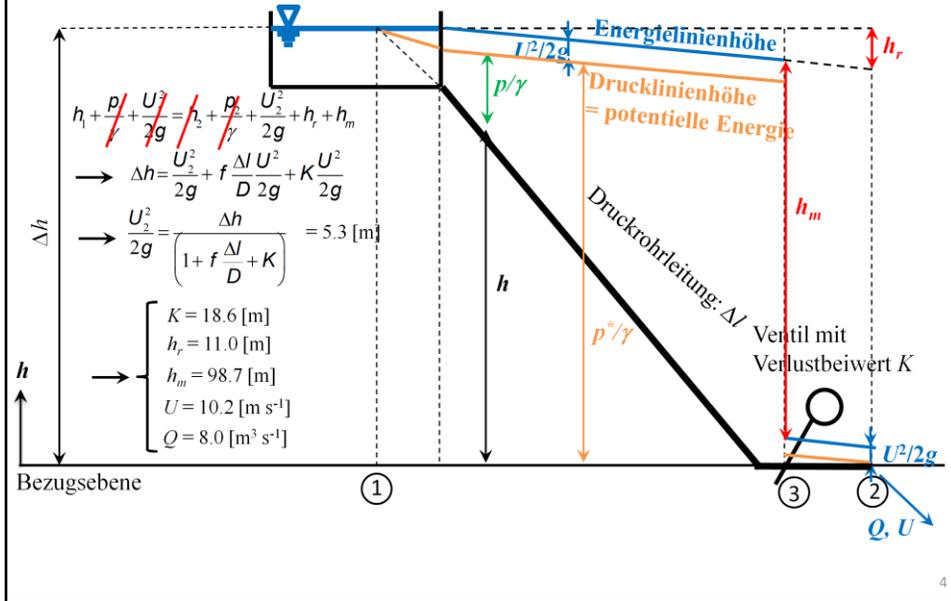


- Wir haben eine Lösung für einen Richtungswechsel in der Vorlesung TH\_EulerMomentumTheorem entwickelt:

$$\oint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_g + \vec{F}_p \rightarrow \begin{cases} F_{x,flow} = \left( \rho \frac{Q^2}{S} + \rho S \right) (1 - \cos \theta) \\ F_{y,flow} = - \left( \rho \frac{Q^2}{S} + \rho S \right) (\sin \theta) \end{cases}$$

- Wir vernachlässigen das Gewicht des Wassers im Kontrollvolumen,
- Die einzige Unbekannte der Gleichung ist  $p$  direct am Knick. Diese muss berechnet werden durch Betrachtung des Energiebudgets entlang des gesamten Systems (Bernoulligleichung erweitert durch Energieverluste). Dieses Energiebudget wurde detailliert in der Vorlesung TH\_PipeFlow dargestellt. Es gibt nur einen wesentlichen Unterschied, um die letzten horizontalen 20[m] zu berücksichtigen.

### Ex 1. Euler Impulssatz. Lösung



## Ex 1. Euler Impulssatz. Lösung

- Angenommen das Ventil ist in der Mitte des geraden Stückes (10[m] vor dem Ende des Druckrohres) angeordnet und das der Knick ist direkt vor bzw. Nach dem Ventil.
- Wir finden  $p/\gamma$  bei dem Knick durch Anwendung der Bernoulligleichung zwischen einem Punkt, an dem wir die Fluss charakteristik und das Energielevel kennen (so wie die Oberfläche eines Reservoirs oder der Ausfluss eines Druckrohres) und des Knicks (Punkt 3, letzte Folie). Wählen wir die Oberfläche des Reservoirs als bekannten Punkt.

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = h_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} + h_r (+h_m)$$

Die hauptsächlich Energieverluste sind in Klammern geschrieben, weil sie excludiert/includiert sein müssen für den Knick stromaufwärt/stromabwärts des Ventils

$$\rightarrow \frac{p_3}{\gamma} = h_1 - \frac{U^2}{2g} - f \frac{\Delta l}{D} \frac{U^2}{2g} \left( -K \frac{U^2}{2g} \right) = h_1 - \frac{U^2}{2g} \left[ 1 + f \frac{\Delta l}{D} (+K) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta l = 150 \text{ [m]} \\ f = 0.013; \text{ Wert berechnet für diesen Fall in den Beispielen TH_PipeFlow} \\ U^2/2g = 5.3 \text{ [m]}; \text{ Wert gegeben in vorherigen Folien} \\ K = 18.6; \text{ Wert gegeben in vorherigen Folien} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_3}{\gamma} = 99.4 \text{ [m]} \quad \text{Für den Knick stromaufwärts des Ventils} \\ \frac{p_3}{\gamma} = 0.8 \text{ [m]} \quad \text{Für den Knick stromabwärts des Ventils} \end{array} \right.$$

## Ex 1. Euler Impulssatz. Lösung

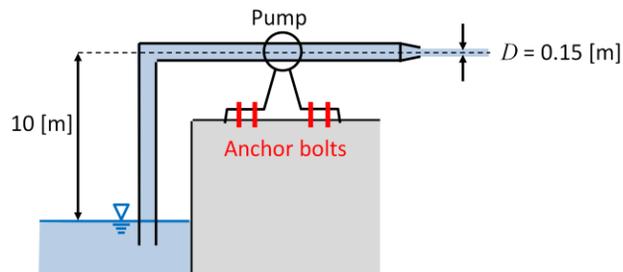
	Knick stromaufwärts des Ventils	Knick stromabwärts des Ventils
$\left\{ \begin{array}{l} F_{x, flow} = \left( \rho \frac{Q^2}{S} + p S \right) (1 - \cos \theta) \\ F_{y, flow} = - \left( \rho \frac{Q^2}{S} + p S \right) (\sin \theta) \end{array} \right.$	$\begin{aligned} &= (8'149 + 76'585) \times 0.74 \\ &= 62.8 \text{ [kN]} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= (8'149 + 6'164) \times 0.74 \\ &= 10.6 \text{ [kN]} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} &= (8'149 + 76'585) \times 0.97 \\ &= 81.8 \text{ [kN]} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= (8'149 + 6'164) \times 0.97 \\ &= 13.8 \text{ [kN]} \end{aligned}$

**Bemerkungen:**

- Die ausgeübte Kraft durch den Fluss im Druckrohr im Rohrkrümmer und die daraus folglich erfordernden Verankerungskräfte für den rohrkrümmer sind viel kleiner, wenn der Knick stromabwärts des Ventils installiert ist.
- Der zweite Term, welcher  $p$  berücksichtigt, ist in diesem Fall wichtiger als der erste Term, welcher den Momentenfluss berücksichtigt. Diese Aussage kann jedoch nicht für alle Fälle generalisiert werden.

## Ex 2. Euler Impulserhaltung

Ein horizontaler Strahl wird von einer Pumpe aus einem großem Reservoir generiert. Der Ausfluss des Strahles ist  $Q = 0.1 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$  und die Strahldruckmesser ist  $D = 0.15 \text{ [m]}$ . Die freie Oberfläche des Reservoirs ist  $10 \text{ [m]}$  unterhalb der Strahlachse angeordnet. Energieverluste können vernachlässigt werden.



1. Berechne die Energielinienhöhe, induziert durch die Pumpe.
2. Wie viele Bolzen sind notwendig um die Pumpe zu verankern, wenn ein Bolzen eine Scherkraft von  $25 \text{ [N]}$  aufnehmen kann?

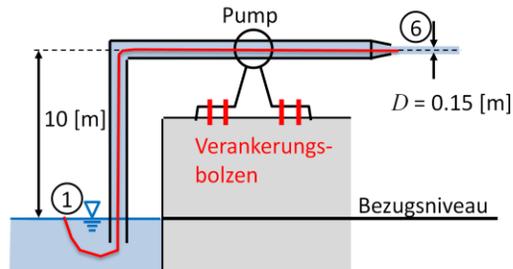
## Ex 2. Euler Impulserhaltung. Lösung

### 1. Berechne die Energielinienhöhe, induziert durch die Pumpe.

Die Energielinienhöhe, induziert durch die Pumpe, wird durch die Anwendung der Bernoulligleichung berechnet entlang einer Stromlinie (in rot gekennzeichnet), zwischen Punkt 1 an der freien Oberfläche des Reservoirs und Punkt 6 im Puppenstrahl am Rohrauslass. Die Bernoulligleichung enthält den Term  $h_{pump}$ , welcher die Energiezufuhr der Pumpe beschreibt.

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + h_{pump} = h_6 + \frac{p_6}{\gamma} + \frac{U_6^2}{2g}$$

- Druck ist gleich  
Atmosphärendruck an den  
freien Oberflächen ( $p_1 = p_6 = p_a = 0$ )
- $U_1 = 0$



$$\rightarrow h_{pump} = h_6 - h_1 + \frac{U_6^2}{2g} = h_6 - h_1 + \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} = 11.6 \text{ [m]}$$

Die Pumpe muss 10 [m] an potentieller Energie und 1.6 [m] an kinematischer Energy zuführen.

- Eine andere wichtige Eigenschaft ist die benötigte hydraulische Kraft der Pumpe. Sie ist gegeben durch  $\mathcal{P} = \gamma Q h_{pump}$  [W]. In diesem Beispiel wird eine Pumpe mit der hydraulischen Kraft von  $\mathcal{P} = 11.4$  [kW] benötigt.
- Achtung: Dieser Aufbau induziert ein Kavitationsrisiko.

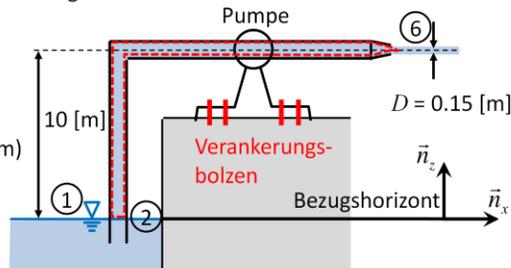
## Ex 2. Euler Impulserhaltung. Lösung

### 2. Wie viele Bolzen sind notwendig um die Pumpe zu verankern, wenn ein Bolzen eine Scherkraft von 25[N] aufnehmen kann?

Die Verankerung der Pumpe muss alle einwirkenden Kräfte durch den Strahl aufnehmen (weitergegeben durch die Rohrwand) können. Da der Strom reibungsfrei ist, ist diese Kraft das Integral des Druckes an der Rohrwand. Dafür wählen wir ein Kontrollvolumen (hier in rot), welches das gesamte Rohr umgibt.

$$\oint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_\sigma$$

(Siehe TH\_EulerMomentumTheorem)



$$\vec{F}_\sigma = 0 \quad \text{im reibungsfreien Fluid}$$

$$\vec{F}_g = -\gamma V \vec{n}_z \quad \text{Ist das Gewicht des Fluids im Kontrollvolumen } V$$

$$\vec{F}_p = p_2 S_2 \vec{n}_z - p_6 S_6 \vec{n}_x - \vec{F}_{anchor}$$

Wobei  $\vec{F}_{anchor}$  die Kraft ist, welche durch den Fluss auf die Verankerung hervorgerufen ist. Diese ist gleich zu der Kraft, welche durch den Strahl auf das Rohr wirkt.

Angenommen, der Einfachkeithalber, dass das Rohr einen konsten Querschnitt hat  $S_{pipe}$

## Ex 2. Euler momentum theorem. Solution

$$\rightarrow \vec{F}_{anchor} = -\gamma V \vec{n}_z - \oint_{S_2} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{S_6} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS + p_2 S_2 \vec{n}_z - p_6 S_6 \vec{n}_x$$

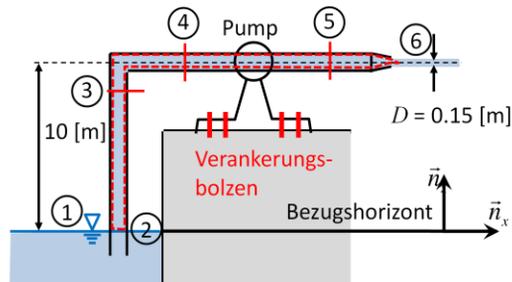
$$\rightarrow \begin{cases} F_{x,anchor} = 0 - 0 - \frac{\rho Q^2}{S_{nozzle}} + 0 - \cancel{\rho_a S_{nozzle}} = 566 \text{ [N]} \rightarrow 23 \text{ Bolzen sind} \\ F_{z,anchor} = -\gamma V + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} - 0 + p_2 S_{pipe} - 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{notwendig, um die} \\ \text{Pumpe zu verankern.} \end{array}$$

Dieses Beispiel ist nicht so einfach und trivial wie es am ersten Blick wirkt. Es ist geeignet, die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Kontrollvolumens dazustellen. Betrachten wir die unterschiedlichen Komponenten der resultierenden Verankerungskraft durch aufteilen des Kontrollvolumens.

Die Gesamtkraft  $\vec{F}_{anchor}$  beruht auf 4 Teilen:

- $\vec{F}_{vert}$  zwischen Punkt 2 und 3
- $\vec{F}_{bend}$  zwischen Punkt 3 und 4
- $\vec{F}_{pump}$  zwischen Punkt 4 und 5
- $\vec{F}_{nozzle}$  zwischen Punkt 5 und 6

Diese 4 Teile werden betrachtet.



## Ex 2. Euler Impulssatz. Lösung

### 1. Das vertikale Rohr:

$$\vec{F}_{vert} = -\gamma V_{vert} \vec{n}_z + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_z - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_z + p_2 S_{pipe} \vec{n}_z - p_3 S_{pipe} \vec{n}_z \rightarrow \begin{cases} F_{x,vert} = 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \\ F_{z,vert} = -\gamma V_{vert} + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} + p_2 S_{pipe} - p_3 S_{pipe} \end{cases}$$

### 2. Der Rohrkrümmer:

$$\vec{F}_{bend} = -\gamma V_{bend} \vec{n}_z + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_z - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_x + p_3 S_{pipe} \vec{n}_z - p_4 S_{pipe} \vec{n}_x \rightarrow \begin{cases} F_{x,bend} = 0 - 0 - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} + 0 - p_4 S_{pipe} \\ F_{z,bend} = -\gamma V_{bend} + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} - 0 + p_3 S_{pipe} - 0 \end{cases}$$

### 3. Die Pumpe:

$$\vec{F}_{pump} = -\gamma V_{pump} \vec{n}_z + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_x - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_x + p_4 S_{pipe} \vec{n}_x - p_5 S_{pipe} \vec{n}_x \rightarrow \begin{cases} F_{x,pump} = 0 + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} - \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} + p_4 S_{pipe} - p_5 S_{pipe} \\ F_{z,pump} = -\gamma V_{pump} + 0 - 0 + 0 - 0 \end{cases}$$

### 4. Die Düse:

$$\vec{F}_{nozzle} = -\gamma V_{nozzle} \vec{n}_z + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} \vec{n}_x - \frac{\rho Q^2}{S_{nozzle}} \vec{n}_x + p_5 S_{pipe} \vec{n}_x - p_6 S_{nozzle} \vec{n}_x \rightarrow \begin{cases} F_{x,nozzle} = 0 + \frac{\rho Q^2}{S_{pipe}} - \frac{\rho Q^2}{S_{nozzle}} + p_5 S_{pipe} - p_6 S_{nozzle} \\ F_{z,nozzle} = -\gamma V_{nozzle} + 0 - 0 + 0 - 0 \end{cases}$$

- Wobei  $p_2, p_3, p_4, p_5$  und  $p_6$  durch Anwendung der Bernoulligleichung errechnet wurden.
- Die Summe der 4 Beiträge gibt eine Gesamtkraft, um Frage 2 zu beantworten.
- Eine fehlerhafte Wahl des Kontrollvolumens, welche nicht die gesamte Rohrwand umschließt, würde nur die Kräfte berücksichtigen, welche durch die Pumpe induziert sind.

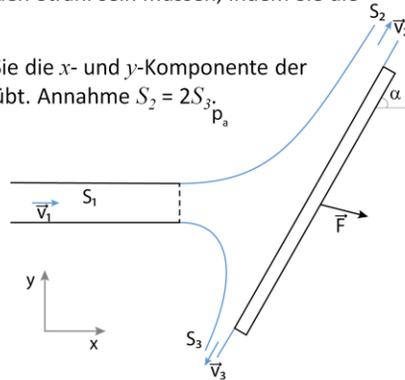
11

### Ex 3. Euler Impulssatz

Wasser ( $\rho = 1000 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$ ) wird aus einem Rohr mit der Querschnittsfläche  $S_1 = 0.2 \text{ [m}^2\text{]}$  mit einer Geschwindigkeit von  $U_1 = 10 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$  gepumpt, bevor es auf eine stationäre Platte trifft die um einen Winkel  $\alpha = 60^\circ$  gegenüber dem einströmenden Strahl gekippt ist. Der ankommende Strahl wird in zwei austretende Strahle aufgetrennt. Nehmen Sie an, dass die Einwirkung der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Der Strahl ist bei Atmosphärendruck von Luft umgeben. Die Skizze zeigt die Draufsicht auf den Strahl, der aus dem Rohr austritt und auf die Platte trifft.

1. Beweisen Sie, dass die Größen der ausgehenden Geschwindigkeiten  $U_2$  und  $U_3$  gleich der Größe der Geschwindigkeit  $U_1$  des einströmenden Strahl sein müssen, indem Sie die Bernoulli-Gleichung verwenden.

2. Wähle ein Kontrollvolumen und berechnen Sie die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Gesamtkraft  $F$ , die der Strahl auf die Platte ausübt. Annahme  $S_2 = 2S_3$ ,  $p_a$



### Ex 3. Euler Impulssatz. Lösung

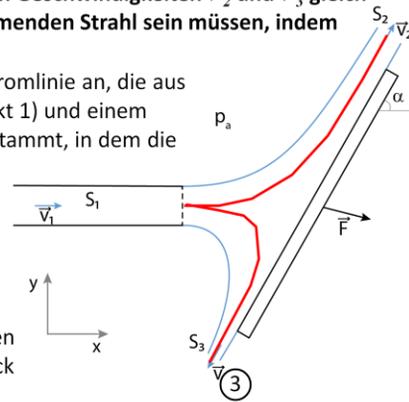
1. Beweisen Sie, dass die Größen der ausgehenden Geschwindigkeiten  $V_2$  und  $V_3$  gleich der Größe der Geschwindigkeit  $V_1$  des einströmenden Strahl sein müssen, indem Sie die Bernoulli-Gleichung verwenden.

- Wenden Sie die Bernoulli Gleichung auf eine Stromlinie an, die aus dem Strahl in der Nähe des Rohrauslasses (Punkt 1) und einem Strahl in der Nähe der Platte in einem Bereich stammt, in dem die Stromlinie gerade verläuft (Punkt 2):

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_{pump} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

- The Fläche ist horizontal  $h_1 = h_2$ .
- Der Druck an der Strahl-Luft Grenzfläche ist atmosphärisch. In Abschnitten mit quasi-geraden und quasi-linearen Stromlinien variiert der Druck nicht senkrecht zur Stromlinie (TH\_BernoulliEquation). Daraus ergibt sich  $p = p_a$  in den Querschnitten mit den Punkten 1 und 2.  
 $\rightarrow V_1 = V_2$

- Beachten Sie, dass im Allgemeinen, wenn Hochgeschwindigkeitsstrahlen (auch nicht-horizontale)  $h_1 - h_2$  in Bezug auf  $V^2/2g$  vernachlässigbar ist, was bedeutet, dass  $V_1 \approx V_2$ .
- Durch Anwendung der Bernoulli-Gleichung auf eine Stromlinie zwischen den Punkten 1 und 3 erhält man  $V_1 = V_3$



### Ex 3. Euler Impulssatz. Lösung

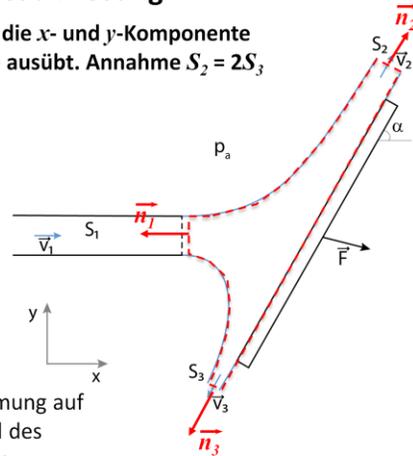
2. Wähle ein Kontrollvolumen und berechnen Sie die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Gesamtkraft  $F$ , die der Strahl auf die Platte ausübt. Annahme  $S_2 = 2S_3$

- Wähle ein geeignetes Kontrollvolumen (in der Abbildung in Rot) im Strahl, der von den Oberflächen  $S_a$ ,  $S_2$  und  $S_3$  senkrecht zum Strahl begrenzt wird, in Bereichen, in denen der Strahl quasi gerade ist.
- Wenden Sie den Euler Impulssatz an:

$$\oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_{p^*}$$

- $\vec{F}_{p^*} = -\vec{F}$  wobei  $F$  die Kraft ist, die von der Strömung auf die Platte ausgeübt wird.  $F$  wird als das Integral des Drucks auf die Oberfläche des Kontrollvolumens erhalten. Nur Drücke die vom Atmosphärendruck abweichen, tragen zu  $F$  bei. Diese abweichenden Drücke treten auf der Platte auf.

- Angenommen die Geschwindigkeit ist im Querschnitt des Strahls konstant:  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = U$   
 $\rightarrow \rho U^2 S_1 \vec{n}_1 + \rho U^2 S_2 \vec{n}_2 + \rho U^2 S_3 \vec{n}_3 = -\vec{F}$



### Ex 3. Euler Impulssatz. Lösung

- Massenerhaltung:  $Q_1 = Q_2 + Q_3 \rightarrow US_1 = US_2 + US_3 \rightarrow S_1 = S_2 + S_3$
  - Eingabedaten:  $S_2 = 2S_3$
- $$\left. \begin{array}{l} S_2 = 2S_1/3 \\ S_3 = S_1/3 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \rho U^2 S_1 \left( \vec{n}_1 + \frac{2}{3} \vec{n}_2 + \frac{1}{3} \vec{n}_3 \right) = -\vec{F}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (-1, 0) \\ \vec{n}_2 = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) \\ \vec{n}_3 = (-\cos 60^\circ, -\sin 60^\circ) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho U^2 S_1 \left( -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = -F_x \\ \rho U^2 S_1 \left( 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = -F_y \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = 16.7 \text{ [kN]} \\ F_y = -5.8 \text{ [kN]} \end{array} \right.$$

Anmerkung:

Für einen Winkel  $\alpha = 0^\circ$  würde dieser Ansatz dazu führen, dass der Strahl keine Kraft auf die Platte ausübt. Dieses Ergebnis erhalten wir, weil wir die Reibung zwischen der Platte und den Strahl vernachlässigt haben.

## Ex 1. Bernoulli-Gleichung

Pistol Shrimp = Knallkrebse  
oder Pistolengrebse

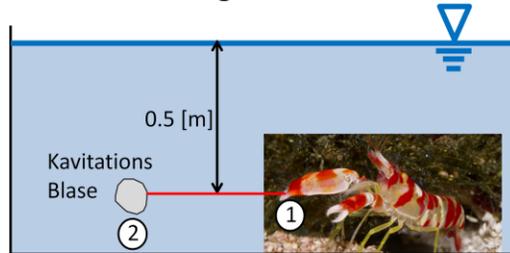


Wir haben in TH\_Introduction die sehr originelle und überraschende Jagdstrategie der Pistolengarnelen diskutiert. Durch schnelles Schließen der Zange erzeugt die Pistolengarnele einen Hochgeschwindigkeitsstrahl, der zur Erzeugung einer Kavitationsblase führt. Der Druckstoß, der durch die nachfolgende Explosion der Kavitationsblase erzeugt wird, tötet die Beute.

Stellen Sie sich vor, dass die Pistolengarnele am Boden eines 0.5 [m] tiefen Aquariums mit Wasser bei 20 [°] gefüllt ist. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Strahl, den die Pistolengarnele erzeugt.

## Ex 1. Bernoulli-Gleichung

- Nähern Sie das Problem als stationäre Strömung an
- Wenden Sie die Bernoulli-Gleichung auf die Stromlinie an, die von der Klaue der Pistolengarnele stammt (Punkt 1) und endet in der Kavitationsblase (Punkt 2):

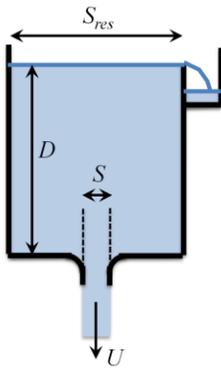


$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}$$

- Annahme  $h_1 = h_2$  und  $U_1 = 0$
- $p_1/\gamma = p_d/\gamma + 0.5 \text{ [m]} = 101'360/9'810 + 0.5 \text{ [m]} = 10.83 \text{ [m]}$ . Bei Kavitation ist es wichtig, den absoluten Druck (einschließlich des atmosphärischen Drucks) zu berücksichtigen.
- $p_2 = p_v = 2'339 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$  Dampfdruck von Wasser bei  $20 \text{ [}^\circ\text{]}$  (siehe TH\_Introduction), d.h. der Druck, bei dem Wasser kocht (und somit Kavitationsblasen erzeugt) bei  $20 \text{ [}^\circ\text{]}$ .

$$\rightarrow U_2 = \sqrt{2g \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} \right)} \approx 14 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

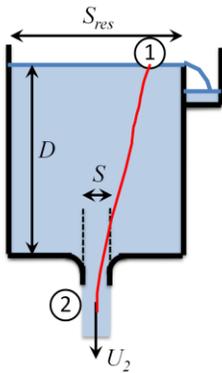
## Ex 2. Bernoulli-Gleichung. Torricellis Formel (1644)



Betrachten wir ein Reservoir mit konstanter Oberfläche  $S_{res}$ , das mit einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ] gefüllt ist. Es gibt einen Überlauf um die Flüssigkeit auf einen konstanten Pegel  $D$  [m] im Reservoir zu halten. Die Flüssigkeit strömt in Form eines Strahls durch eine Öffnung im Boden der Oberfläche  $S$  [ $\text{m}^2$ ] aus dem Reservoir .

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $U$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] im Strahl.
2. Bestimmen Sie den Ausfluss der durch die Bodenöffnung ausströmt.
3. Betrachten Sie nun die Entleerung des Reservoirs. Nehmen Sie an, dass  $S \ll S_{res}$  sodass die Variation der freien Oberfläche im Reservoir sehr langsam ist, und das Problem kann als quasi-stetig angesehen werden. Bestimmen Sie die Zeit, die benötigt wird um das Reservoir zu leeren.

## Ex 2. Bernoulli-Gleichung. Torricellis Formel (1644). Lösung



### 1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $U$ [ $\text{m s}^{-1}$ ] im Strahl.

- Wenden Sie die Bernoulli-Gleichung auf eine Stromlinie an, die von der Wasseroberfläche (Punkt 1) ausgeht, und im freien Strahl genau unter der Öffnung (Punkt 2) endet:

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}$$

- Der Druck an der Strahl-Luft Grenzfläche ist atmosphärisch. In Abschnitten mit quasi-geraden und quasi-linearen Stromlinien variiert der Druck nicht senkrecht zur Stromlinie (TH\_BernoulliEquation). Als Ergebnis ist  $p = p_a$  im Strahl unmittelbar unter der Öffnung
- Massenerhaltung:  $U_1 S_{res} = U_2 S$  wenn wir konstante Geschwindigkeiten an der Reservoir-Oberfläche und im Strahl annehmen.
- Da  $S \ll S_{res}$ , ist die Variation der freien Oberfläche im Reservoir sehr langsam  $\rightarrow U_1 \approx 0$ .

$$\rightarrow U_2 = \sqrt{2gD} \quad : \text{ Torricellis Formel}$$

## Ex 2. Bernoulli-Gleichung. Torricellis Formel (1644). Lösung

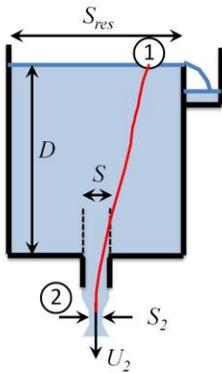
Beachte, dass die gleichen Ergebnisse für eine Öffnung in der Seitenwand des Reservoirs erhalten werden, solange die Größe der Öffnung in Bezug auf  $D$  klein ist.

Es gibt zwei überraschende Dinge über die Torricellis Formel:

- 1) Die Geschwindigkeit des Ausströmens einer Flüssigkeit aus einer Öffnung in einem Reservoir ist gleich der Geschwindigkeit, die die Flüssigkeit erhalten würde, wenn sie aus der Ruhe von der Oberfläche des Reservoirs zu der Öffnung fallen könnte. Die Geschwindigkeit eines festen Teilchens, das im Vakuum von einer Höhe  $D$  fällt, wäre gleich.
- 2) Diese Geschwindigkeit des Ausströmens ist unabhängig von der Dichte des Fluides, d.H. Öl und Wasser haben die gleiche Ausströmgeschwindigkeit.

Erklärung: Durch Anwendung der Bernoulli-Gleichung entlang einer Stromlinie haben wir Energieverluste vernachlässigt, d.h. wir haben angenommen, dass die Flüssigkeit keinen Widerstand gegen Verformung oder Strömung oder anders gesagt Viskosität hat.

## Ex 2. Bernoulli-Gleichung. Torricellis Formel (1644). Lösung



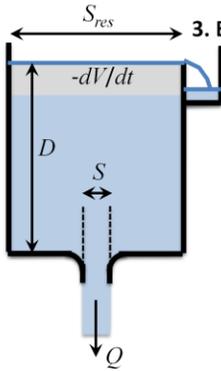
2. Bestimmen Sie den Ausfluss, der durch die Bodenöffnung ausströmt.

$$Q = S_2 U_2 = C_c S U_2 = C_c S \sqrt{2gD}$$

$C_c$  ist der Kontraktionskoeffizient.

- Eine Kontraktion des Strahlquerschnitts bildet sich typischerweise unmittelbar stromabwärts der Öffnung. Der kleinste Querschnitt wird Vena Contracta genannt. Die Querschnittsfläche ist definiert als  $S_2 = C_c S$ , wobei  $S$  die Querschnittsfläche der Öffnung ist.
- Der Kontraktionskoeffizient  $C_c$  hängt von der Geometrie der Öffnung ab. Für eine abgerundete Öffnung (wie in der vorherigen Abbildung skizziert) ist die Kontraktion vernachlässigbar und  $C_c \approx 1$ . Für scharfkantige Öffnungen kann  $C_c$  bis 0.6 heruntergehen.

## Ex 2. Bernoulli-Gleichung. Torricellis Formel (1644). Lösung



3. Bestimme die Zeit  $t_e$ , die zum Entleeren des Reservoir benötigt wird

Zufolge der Massenerhaltung führt der ausströmende Durchfluss  $Q$  zum Verlust des Flüssigkeitsvolumens im Reservoir von  $-dV$  pro Zeiteinheit  $dt$ , oder:  $Q = -dV/dt$ . Dieser Verlust an Flüssigkeitsvolumen tritt als Absenkung der Wasseroberfläche im Reservoir auf, oder  $dV = S_{res}(D)dD$ .

$$\rightarrow Q = C_c S \sqrt{2gD} = -S_{res}(D) \frac{dD}{dt}$$

$$\rightarrow dt = -\frac{1}{C_c S \sqrt{2g}} \frac{S_{res}(D)}{\sqrt{D}} dD$$

$$\rightarrow \int_0^{t_e} dt = t_e = -\frac{1}{C_c S \sqrt{2g}} \int_{D_0}^0 \frac{S_{res}(D)}{\sqrt{D}} dD \quad : D_0 = \text{Anfangswasserstand im Reservoir}$$

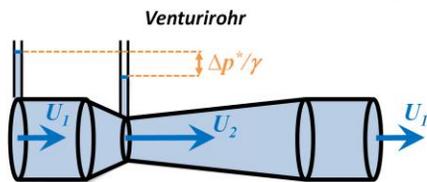
- Beachte, dass diese Formel für eine beliebige Form des Reservoirs gültig ist.
- Für ein Reservoir mit konstanter Querschnittsform ( $S_{res} = \text{konstant}$ ) ergibt die Formel:

$$t_e = -\frac{S_{res}}{C_c S \sqrt{2g}} \int_{D_0}^0 \frac{dD}{\sqrt{D}} = \frac{2S_{res}\sqrt{D_0}}{C_c S \sqrt{2g}}$$

### Ex 3. Bernoulli-Gleichung. Das Venturirohr (~1800)

Ein Venturirohr ist ein Rohr das aus einer Kontraktion gefolgt von einer Expansion besteht (Abbildung) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit und der Durchfluss aus der Druckdifferenz zwischen dem stromaufwärts gelegenen Abschnitt und dem kontrahierten Abschnitt abgeleitet werden können.

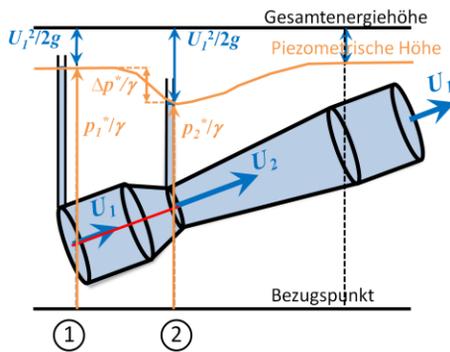
Beachte, dass Energieverluste in der konvergierenden Strömung typischerweise vernachlässigbar sind, während sie in divergierenden Strömungen beträchtlich sein können, besonders wenn sich die Strömung von den Wänden und Rezirkulationszonen trennt. Aus diesem Grund ist die Kontraktion von Venturiröhren typischerweise ziemlich abrupt ( $\sim 20^\circ$ ), während die Divergenz typischerweise eher sachte ist ( $\sim 6^\circ$ ).



**Venturirohr am Rumpf eines Flugzeugs für Geschwindigkeitsmessung**



### Ex 3. Bernoulli-Gleichung. Das Venturirohr (~1800). Lösung



Angenommen die Geschwindigkeit ist in dem Annäherungsquerschnitt 1 und im kontrahierten Querschnitt 2 konstant. Weiters sei angenommen, dass Stromlinien lokal gerade und parallel sind, was impliziert, dass  $p^*$  im Querschnitt konstant ist (siehe TH\_BernoulliEquation). Das bedeutet, dass die Energie pro Einheitshöhe  $E = p^* + U^2/2g$  im Querschnitt konstant ist.

Wenden Sie nun die Bernoulli-Gleichung auf eine Stromlinie an, die zwischen einem Punkt im Querschnitt 1 und einem Punkt im Querschnitt 2 liegt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_1^*}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2^*}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \\ \text{Massenerhaltung} \\ Q = U_1 S_1 = U_2 S_2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta p^*}{\gamma} = \frac{p_1^*}{\gamma} - \frac{p_2^*}{\gamma} = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \rightarrow Q = C_Q U_2 S_2 = \frac{\sqrt{2g \frac{\Delta p^*}{\gamma}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2}} S_2$$

Der empirische Durchflusskoeffizient  $C_Q$  wird oft eingeführt, um Abweichungen von der Theorie zu berücksichtigen, wie das Auftreten von (relative kleinen) Energieverlusten im Venturirohr <sup>24</sup>

## Ex 1. Gerinneströmung

Betrachten Sie einen Abschnitt der Donau in der Nähe von Wien.

1. Schematisiere die Geometrie des Flusssystemes und begründe die Schematisierung.

In der Praxis ist es wichtig, Probleme mit der entsprechenden Komplexität zu behandeln. Welche Komplexität haben Sie zum Beispiel bei der Schematisierung der Flussform? Kann die Querschnittsform durch ein Trapez approximiert werden? Oder ist der Effekt der Böschungen vernachlässigbar und kann er durch ein Rechteck approximiert werden, was die Berechnungen vereinfacht? Kann die untere Steigung im betrachteten Abschnitt als konstant angenommen werden?

2. Wähle einen Durchfluss  $Q$  (z.B. die mittlere jährliche Abflussmenge).

3. Zeichnen Sie die spezifischen Energiekurven für  $Q$ .

4. Berechnen Sie die kritische Flusstiefe ( $D_c$ ) und die entsprechende spezifische Energie ( $E_{s,c}$ ) für dieses  $Q$  und geben Sie diese auf der spezifischen Energiekurve an.

5. Machen Sie eine Einschätzung des Reibungskoeffizienten und begründen Sie Ihre Schätzung.

6. Berechnen Sie die normale Flusstiefe ( $D_n$ ) für  $Q$ , und stellen Sie sie auf der spezifischen Energiekurve dar.

7. Definieren Sie das Strömungsregime.

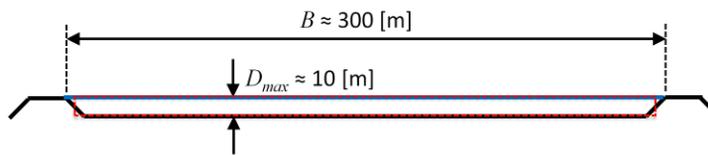
8. Aufgrund von Bauarbeiten muss die Breite auf einer Länge von 500m auf 50m reduziert werden. Berechnen Sie anhand von spezifischen Energiebetrachtungen, die lokale Variation der Höhe der Wasseroberfläche, die sich aus dieser Breitenreduzierung ergibt.

25

## Ex 1. Gerinneströmung. Lösung

### 1. Schematisiere die Geometrie des Flusssystemes und begründe die Schematisierung.

- Wir können beispielsweise auf einer Karte oder Google Earth messen, dass die obere Breite etwa 300 [m] beträgt.
- Wir können die Bodenneigung auf einer Karte, Google Earth oder in der Literatur suchen. Das Längsprofil der Donau wurde in TH\_Introduction dargestellt. Diese Abbildung zeigt eine Neigung, die in der Nähe von Wien quasi konstant ist und ungefähr gleich  $J_f = 0.0005$  [-].
- Die Querschnittsform kann durch ein Trapez mit horizontaler Unterseite und Böschungen angenähert werden. Die maximale Fließtiefe bei Wien beträgt ca. 10 [m]. Dies impliziert ein minimales Verhältnis von Breite zu Tiefe von  $B/D_{max} = 30$ . Es wird generell akzeptiert, dass die Neigung der Böschungen für Kanäle mit  $B/D > 10$  vernachlässigt werden kann. Dies bedeutet, dass die Querschnittsform angenähert werden kann durch ein Rechteck. Beachten Sie, dass die Berechnungen für einen rechteckigen Querschnitt einfacher sind als für einen trapezförmigen. Die trapezförmigen und annähernd rechteckigen (rote Linie) Querschnitte sind in der folgenden Abbildung maßstabsgetreu gezeichnet, was überzeugend zeigt, dass die Auswirkungen der Böschungsneigung vernachlässigbar sind.



Dieser Grad der Annäherung ist für die meisten praktischen technischen Anwendungen ausreichend. Beachten Sie auch, dass detailliertere geometrische Eingabedaten in technischen Anwendungen oft nicht verfügbar sind.

## Ex 1. Gerinneströmung. Lösung

### 2. Wähle einen Durchfluss $Q$ (zum Beispiel der mittlere jährliche Durchfluss).

Der mittlere Jahresdurchfluss in Wien beträgt  $Q \approx 2000 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$ . Dieses Ergebnis kann aus hydrologischen Daten gewonnen werden, die von den österreichischen hydrologischen Diensten gemessen wurden. Es kann auch aus der Abbildung in TH\_Introduction abgelesen werden. Beachte, dass die Methodik in Ex 1 und Ex 2 auch verwendet werden kann, um einen anderen Durchfluss zu analysieren, z.B. einen Hochwasserdurchfluss.

### 3. Zeichnen Sie die spezifischen Energiekurven für $Q$ .

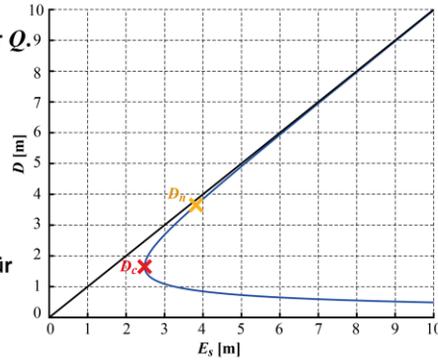
$$E_s = D + \frac{U^2}{2g} = D + \frac{Q^2}{2g(BD)^2}$$

Die Kurve wurde mit Matlab für  $D$  im Bereich 0 bis  $D_{max} = 10 \text{ [m]}$

### 4. Berechnen Sie die kritische Flusstiefe ( $D_c$ ) und die entsprechende spezifische Energie ( $E_{s,c}$ ) für dieses $Q$ und geben Sie diese auf der spezifischen Energiekurve an.

$$\frac{Q^2 B}{gS^3} = \frac{Q^2}{gB^2 D_c^3} = 1 \rightarrow D_c = \left[ \frac{(Q/B)^2}{g} \right]^{1/3} = 1.65 \text{ [m]}$$

und  $E_{s,c} = 2.48 \text{ [m]}$



## Ex 1. Gerinneströmung. Lösung

### 5. Machen Sie eine Einschätzung des Reibungskoeffizienten und begründen Sie Ihre Schätzung

Die Schätzung des Reibungskoeffizienten ist von entscheidender Bedeutung, aber sehr schwierig, wie in TH\_OpenChannelFlow1 beschrieben. Die Donau in Wien wird offensichtlich intensive von den österreichischen hydrologischen Diensten überwacht. Hydrologische Stationen messen kontinuierlich die Flusstiefe (abgeleitet von der Wasseroberflächenerhebung) und gelegentlich den Durchfluss (durch Integration von Geschwindigkeiten, gemessern an einem Gitter von Punkten die den Querschnitt überspannen) messen. Der Reibungskoeffizient kann aus der gemessenen  $Q$ - $D$  Kurve unter der Annahme einer normalen Strömung geschätzt werden. Beachten Sie, dass sich zahlreiche Publikationen mit der Donau in der Nähe von Wien befassen. Diese Veröffentlichungen sind eine zuverlässige Quelle für die Schätzung eines Reibungsfaktors. Für den betrachteten Donauabschnitt wird hier ein Manning-Strickler Reibungskoeffizient von  $K_s = 35 \text{ [m}^{1/3} \text{ s}^{-1}\text{]}$  angenommen.

### 6. Berechnen Sie die normale Flusstiefe ( $D_n$ ) für $Q$ , und stellen Sie sie auf der spezifischen Energiekurve dar.

$$Q = US = K_s R_h^{2/3} J_f^{1/2} S = K_s D_n^{2/3} J_f^{1/2} B D_n = K_s J_f^{1/2} B D_n^{5/3} \rightarrow D_n = \left( \frac{Q}{K_s J_f^{1/2} B} \right)^{3/5} = 3.65 \text{ [m]}$$

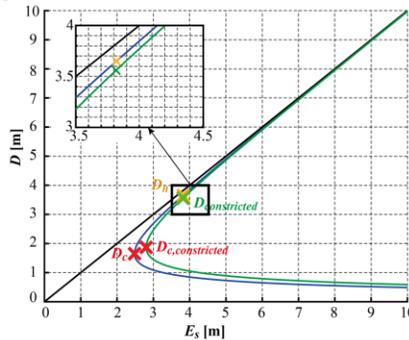
### 7. Definieren Sie das Strömungsregime.

Für den betrachteten Durchfluss ist  $D_n > D_c$ , was bedeutet, dass die normale Strömung bei diesem Durchfluss eine unterkritische Strömung mit  $Fr < 1$  ist. Es bedeutet auch, dass dieser Donauabschnitt ein mildes Gefälle-Gerinne ist.

## Ex 1. Gerinneströmung. Lösung

8. Aufgrund von Bauarbeiten muss die Breite auf einer Länge von 500m auf 50m reduziert werden. Berechnen Sie anhand von spezifischen Energiebetrachtungen, die lokale Variation der Höhe der Wasseroberfläche, die sich aus dieser Breitenreduzierung ergibt.

- Wir stellen zuerst die spezifische Energiekurve für diese eingeschränkte Reichweite (grüne Kurve in Abbildung) dar und überlagern sie auf der Kurve für die nicht eingeschränkte Reichweite.
- Die spezifische Energie für den Normaldurchfluss,  $E_{s,n} = 3.82$  [m], ist größer als die minimal erforderliche spezifische Energie in der eingeschnürten Reichweite,  $E_{s,c,constricted} = 2.80$  [m]. Dies bedeutet, dass die Einschnürung die Strömung in der unzusammenhängenden stromaufwärtigen Reichweite nicht beeinflusst.
- Die Flusstiefe im verengten Abschnitt wird durch  $E_{s,constricted} = 3.82$  [m] und durch anschließendes Ableiten der Flusstiefe  $D_{constricted} = 3.56$  [m] aus der spezifischen Energiekurve ermittelt (siehe Teilbild in der Abbildung). Die Verengung bewirkt einen Abfall der Wasserspiegelhöhe um 0.09 [m].



29

## Ex 2. Gerinneströmung

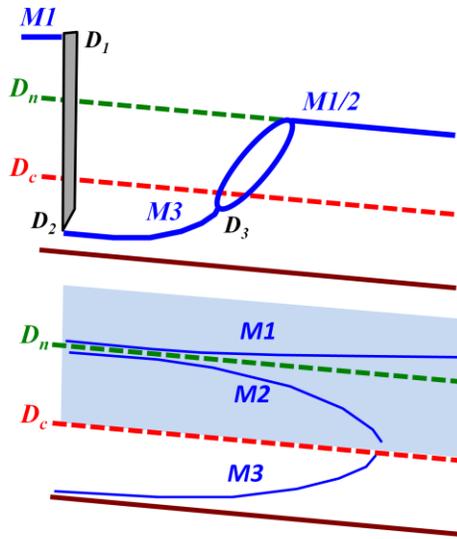
Betrachten Sie den gleichen Abschnitt der Donau wie in Ex 1 und den gleichen Durchfluss. Angenommen der Abschnitt hat eine konstante Geometrie und ist ausreichend lang um normale Strömungsbedingungen herzustellen. Über die gesamte Breite ist eine Schleuse installiert um die Fließtiefe lokal auf 0,5 [m] zu reduzieren.

1. Zeichnen Sie schematisch die Stauwasserkurven vor und hinter der Schleuse. Geben Sie in Ihrem Schema die normale und kritische Flusstiefe an und benennen Sie die Arten der Rückstaukrümmung, die auftreten.
2. Berechnen Sie die Stauwasserkurven vor und hinter der Schleuse.
3. Wenn ein hydraulischer Sprung auftritt, bestimmen Sie dessen konjugierten Tiefen und bestimmen Sie deren Position (Entfernung von der Schleuse). Die Länge des hydraulischen Sprungs kann vernachlässigt werden.

## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

1. Zeichnen Sie schematisch die Stauwasserkurven vor und hinter der Schleuse. Geben Sie in ihrem Schema die normale und kritische Fließtiefe an und benennen Sie die Arten der Rückstaukurven die auftreten.

- Wir beschäftigen uns mit dem Fall eines leicht geneigten Gerinnes, der in TH\_OpenChannelFlow3 betrachtet und schematisch gezeichnet wurde. Die Abbildung aus TH\_OpenChannelFlow3 ist nebenstehend wiedergegeben.
- In einem leicht geneigten Gerinne mit konstanter Geometrie (Bodenneigung und Querschnittsform) tendiert die Strömungstiefe zur normalen Strömungstiefe stromaufwärts. Sobald eine normale Fließtiefe erreicht ist, kann sie sich nicht mehr ändern (nur die Rückstaukurven M1 und M2 sind möglich).



## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

- Die überkritische Flusstiefe an der Schleuse ( $D_2 = 0.5 \text{ [m]} < D_c = 1.65 \text{ [m]}$ ) kann sich nur über einen hydraulischen Sprung mit der stromabwärts liegenden unterkritischen normalen Strömung verbinden. Der hydraulische Sprung tritt zwischen einer zu bestimmenden überkritischen Strömungstiefe  $D_3$  am stromaufwärtigen Ende des hydraulischen Sprungs und der konjugierten normalen Strömungstiefe  $D_n$  am stromabwärtigen Ende des hydraulischen Sprungs auf.

- $D_3$  kann aus dieser Gleichung ermittelt werden (TH\_OpenChannelFlow3):

$$\frac{D_3}{D_n} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_n^2} - 1 \right) ; D_n = 3.65 \text{ [m]} \text{ und } Fr_n = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gS^3}} = \sqrt{\frac{Q^2}{gB^2 D_n^3}} = 0.305 \rightarrow D_3 = 0.59 \text{ [m]}$$

- $D_3 = 0.59 \text{ [m]} > D_2 = 0.5 \text{ [m]}$ , was bedeutet, dass sich eine M3 Rückstaukurve zwischen  $D_2$  und  $D_3$  bildet. Beachte, dass für den Fall  $D_3 < D_2 < D_c$ , ein sogenannter untergetauchter hydraulischer Sprung entsteht (was außerhalb des Rahmens dieser Vorlesung liegt.)
- Der Wasserspiegel vor der Schleuse wird ansteigen, um das Druckgefälle zu erzeugen, das erforderlich ist, um den gesamten Durchfluss unter dem Schleusentor passieren zu lassen. Der Wasserspiegel  $D_1$  vor der Schleuse kann ermittelt werden, indem ausgedrückt wird, dass Energie in der konvergierenden Strömung unter der Schleuse erhalten bleibt:

$$E_{s,1} = D_1 + \frac{Q^2}{2g(BD_1)^2} = E_{s,2} = D_2 + \frac{Q^2}{2g(BD_2)^2} = 9.56 \text{ [m]} \rightarrow D_1 = 9.56 \text{ [m]}$$

- Eine M1 Rückstaukurve wird  $D_1$  mit der normalen Flusstiefe  $D_n$  weiter stromaufwärts verbinden.

32

## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

2. Berechnen Sie die Stauwasserkurven vor und hinter der Schleuse.

3. Wenn ein hydraulischer Sprung auftritt, bestimmen Sie dessen konjugierten Tiefen und bestimmen Sie deren Position (Entfernung von der Schleuse). Die Länge des hydraulischen Sprungs kann vernachlässigt werden.

- Wie in der Vorlesung erwähnt, ist es eine gute Übung, mit dem Rechnen erst dann zu beginnen, wenn Sie die Lösung bereits qualitative kennen. Wir sind jetzt bereit, mit der Berechnung zu beginnen.
- Wir haben in TH\_OpenChannelFlow2 gesehen, dass die Rückstaukurve durch Diskretisierung der Ableitung  $dD/dx$  berechnet werden kann:

$$\frac{dD}{dx} = \frac{J_f - J_e}{1 - Fr^2} = fct(D) \rightarrow \frac{D_{i+1} - D_i}{x_{i+1} - x_i} = fct(D_{i+1/2}) \approx 0.5 [fct(D_i) + fct(D_{i+1})]$$

Meistens wird in Längsrichtung der  $x$  Achse ein regelmäßiges Gitter mit dem Abstand  $\Delta x$  konstant diskretisiert, und die Flusstiefe  $D_i$  wird in jedem Gitterpunkt  $x_i$  nach einer iterativen Prozedur berechnet (siehe TH\_OpenChannelFlow2). Iteration ist erforderlich, weil das unbekannte  $D_{i+1}$  auf der linken Seite und auf der rechten Seite der Gleichung erscheint. Aber es gibt einen schlaueren Weg, die Gleichung im betrachteten Fall zu lösen. Wir können auch den  $D$ -Bereich in regelmäßigen  $\Delta D$  Intervallen diskretisieren und den Ort  $x_i$  berechnen, an dem eine Flusstiefe  $D_i$  auftritt. Diese Vorgehensweise ist im betrachteten Fall sinnvoll, da wir alle relevanten Flusstiefen stromaufwärts und stromabwärts kennen:  $D_n \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow D_n$ . Das Lösen der resultierenden Gleichung erfordert keine Iteration:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{D_{i+1} - D_i}{0.5 [fct(D_i) + fct(D_{i+1})]}$$

33

## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

Die Gleichung kann expliziter geschrieben werden als:

$$fcd(D) = \frac{J_f - J_e}{1 - Fr^2} = J_f \frac{1 - \frac{J_e}{J_f}}{1 - \frac{Fr^2}{1}} = J_f \frac{1 - \frac{K_s^2 R_h^{4/3} S_n^2}{Q^2}}{1 - \frac{g D_h S_n^2}{Q^2}} = J_f \frac{1 - \frac{R_{h,n}^{4/3} S_n^2}{R_h^{4/3} S_n^2}}{1 - \frac{D_{h,c} S_n^2}{D_h S_n^2}}$$

- In TH\_OpenChannelFlow2 haben wir eine ähnliche Gleichung basierend auf dem Chézy Reibungskoeffizienten abgeleitet. Beachte, dass der Exponent von  $R_h$ ,  $4/3$  ist, wenn die Energie-Neigung mit dem Manning-Strickler-Reibungskoeffizienten modelliert wird, und  $1$ , wenn der Chézy Reibungskoeffizient verwendet wird. Für einen breiten rechteckigen Gerinne vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$fcd(D) = J_f \frac{1 - \left(\frac{D_n}{D}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{D_c}{D}\right)^3}$$

34

## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

Dies führt zu der folgenden Gleichung für die Rückstaukurven:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{D_{i+1} - D_i}{0.5J_f \left[ \frac{1 - \left(\frac{D_n}{D_i}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{D_c}{D_i}\right)^3} + \frac{1 - \left(\frac{D_n}{D_{i+1}}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{D_c}{D_{i+1}}\right)^3} \right]}$$

### Stromabwärts des Schleusentors:

- Die Rückstaukurve zwischen  $D_2 = 0.5$  [m] und  $D_3 = 0.59$  [m] ist sehr kurz und kann in einem Schritt berechnet werden. Beim lösen der Gleichung, stellen wir fest, dass der hydraulische Sprung 8.5 [m] hinter dem Schleusentor auftritt,. In der Praxis bedeutet dies unmittelbar hinter der Schleuse.
- Beachte, dass die überkritischen Geschwindigkeiten hinter dem Schleusentor sehr hoch sind, und enormes Erosionspotential aufweisen. In der Praxis muss der Boden im überkritischen Strömungsabschnitt verstärkt werden. Um diesen überkritischen Strömungsabschnitt so kurz wie möglich zu halten und den Ort des hydraulischen Sprungs zu fixieren, ist unmittelbar hinter der Schleuse ein Beruhigungsbecken vorgesehen. Beruhigungsbecken werden in der Vorlesung "Konstruktiver Wasserbau" behandelt.

## Ex 2. Gerinneströmung. Lösung

### Stromaufwärts des Schleusentors:

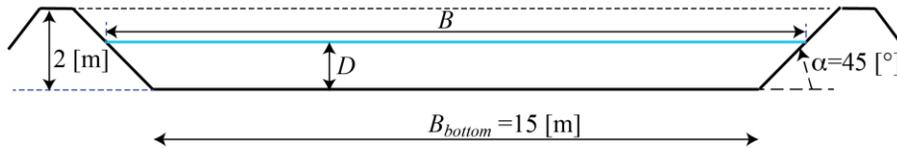
- Hier berechnen wir beim Schleusentor  $D_i = 9.56$  [m] und entwickeln stromaufwärts zu  $D_n = 3.65$  [m].
- Der Wasseroberflächengradient  $dD/dx$  ist für eine M1 Kurve klein. Dies ermöglicht die Wahl ziemlich großer Schritte  $D_{i+1} - D_i$ .

$D_i$ [m]	9.56	8.65	7.65	6.65	5.65	4.65	3.65
$\Delta x$ [m]		-1901	-2134	-2219	-2403	-2928	-6899
$x$ [m]	0	-1901	-4035	-6254	-8657	-11585	-18484

### Ex 3. Gerinneströmung

Betrachtet wird ein Gebirgsfluss mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Bodenlängsneigung von  $J_f = 0.02$ .
- Ein trapezförmiger Querschnitt mit einer Bodenbreite von  $B_{bottom} = 15$  [m], Böschungen mit einem Neigungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$ , und einer Böschungshöhe von 2 [m] (Abbildung).
- Ein Rauheitskoeffizient nach Manning-Strickler von  $K_s = 30$  [ $m^{1/3} s^{-1}$ ].



1. Berechne die hydraulische Kapazität des Flusses, die auch als Uferdurchfluss bezeichnet wird. Angenommen, die Strömung ist normal
2. Berechne die normale und kritische Flusstiefen für den Uferdurchfluss.
3. Identifiziere das Strömungsregime.
4. Zeichnen Sie die spezifische Energiekurve für den Uferdurchfluss und zeigen Sie die normalen und kritischen Strömungen an. Betrachten Sie einen Tiefenbereich von 0 bis 6 m zum Zeichnen der Kurve.
5. Berechnen Sie die Bodenschubspannung für den Uferdurchfluss.

37

### Ex 3. Gerinneströmung. Lösung

1. Berechne die hydraulische Kapazität des Flusses, die auch als Uferdurchfluss bezeichnet wird. Angenommen die Strömung ist normal.

Der Durchfluss für normale Strömungsbedingungen ist gegeben durch (siehe TH\_OpenChannelFlow1):

$$Q = US = K_s R_h^{2/3} J_f^{1/2} S = K_s \left( \frac{S}{P} \right)^{2/3} J_f^{1/2} S = K_s \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} J_f^{1/2}$$

Wobei  $R_h = S/P$  der hydraulische Radius ist,  $S$  die Strömungsquerschnittsfläche und  $P$  der benetzte Umfang unter normalen Strömungsbedingungen ist. Für einen trapezförmigen Querschnitt sind  $S$  und  $P$  definiert als:

$$\left. \begin{aligned} S &= \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D}{\tan \alpha} \right) D \\ P &= B_{\text{bottom}} + \frac{2D}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \rightarrow Q = K_s \frac{\left[ \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D}{\tan \alpha} \right) D \right]^{5/3}}{\left[ B_{\text{bottom}} + \frac{2D}{\sin \alpha} \right]^{2/3}} J_f^{1/2} \rightarrow Q_{\text{bankfull}} = 201 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]} \text{ for } D = 2 \text{ [m]}$$

2. Berechne die normale und kritische Flusstiefe für den Uferdurchfluss.

Die normale Flusstiefe ist  $D_n = 2$  [m] wie in der vorherigen Aufgabe.

Die kritische Flusstiefe liefert die Gleichung:  $\frac{Q^2 B}{g S^3} = 1$  (TH\_OpenChannelFlow1)

Wobei  $Q = Q_{\text{bankfull}}$  und  $B$  die obere Breite ist (d.h. die Breite an der Wasseroberfläche):

$$B = B_{\text{bottom}} + \frac{2D}{\tan \alpha}$$

### Ex 3. Gerinneströmung. Lösung

$$\rightarrow Q_{\text{bankfull}}^2 \frac{\left( B_{\text{bottom}} + \frac{2D_c}{\tan \alpha} \right)}{\left[ g \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D_c}{\tan \alpha} \right) D_c \right]^3} - 1 = 0$$

Die Lösung dieser impliziten Gleichung liefert  $D_c = 2.49$  [m]

#### 3. Identifiziere das Strömungsregime

Für einen Uferdurchfluss ist,  $D_n < D_c$ , was impliziert, dass die normale Strömung bei einem Uferdurchfluss eine überkritische Strömung mit  $Fr > 1$  ist. Es bedeutet außerdem, dass es sich um ein Steilhang-Gerinne handelt.

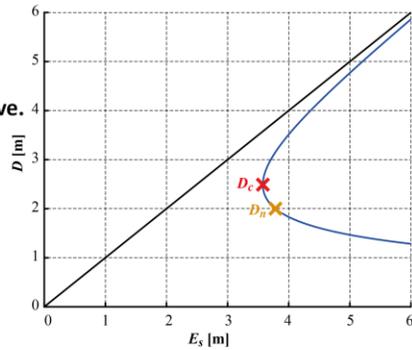
#### 4. Zeichnen Sie die spezifische Energiekurve für den Uferdurchfluss und zeigen Sie die normalen und kritischen Strömungen an. Betrachten Sie einen Tiefenbereich von 0 bis 6 m zum Zeichnen der Kurve.

$$E_s = D + \frac{U^2}{2g} = D + \frac{Q^2}{2g \left[ \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D}{\tan \alpha} \right) D \right]^2}$$

#### 5. Berechne die Bodenschubspannung für den Uferdurchfluss.

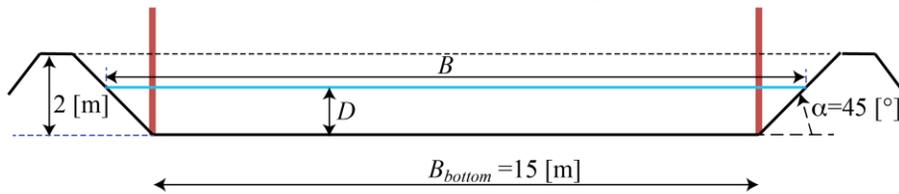
$$\tau_b = \rho g D J_e \stackrel{\text{normal flow}}{=} \rho g D_n J_f = 392.4 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

(siehe TH\_OpenChannelFlow1)



### Ex 4. Gerinneströmung

Betrachten Sie den gleichen Gebirgsfluss wie in Ex. 3. Aufgrund der Kreuzung einer Autobahnbrücke sind die Ufer örtlich vertikal, aber die Bodenbreite wird auf 15 m gehalten, was zu einer lokalen Einschnürung der Strömung führt (Abbildung).



1. Zeichnen Sie die spezifische Energiekurve in dem eingeschränkten Bereich für den Uferdurchfluss der in Ex 3 ermittelt wurde. Überlagern Sie diese mit der spezifischen Energiekurve aus Ex. 3.
2. Um wie viel müssen die Ufer erhöht werden, um die hydraulische Kapazität aufrecht zu erhalten, d. H. um Überschwemmungen zu vermeiden.
3. Ein hydraulischer Sprung wird stromaufwärts der Einschnürung auftreten. Berechnen Sie die konjugierten Flusstiefen (d. h. Die Flusstiefen unmittelbar stromaufwärts und stromabwärts des hydraulischen Sprungs) und die Energieverluste in dem hydraulischen Sprung.
4. Zeichnen Sie schematisch die Längsprofile des Flussbetts, die Wasseroberfläche und die Energielinie im Bereich stromaufwärts vor der Einschnürung; geben Sie auch die normalen und kritischen Fließtiefen an.
5. Veranschaulichen Sie die Entwicklung der Wassertiefe auf der spezifischen Energiekurve.

40

## Ex 4. Gerinneströmung. Lösung

1. Zeichnen Sie die spezifische Energiekurve in dem eingeschränkten Bereich für den Uferdurchfluss der in Ex 3 ermittelt wurde. Überlagern Sie diese mit der spezifischen Energiekurve aus Ex. 3.

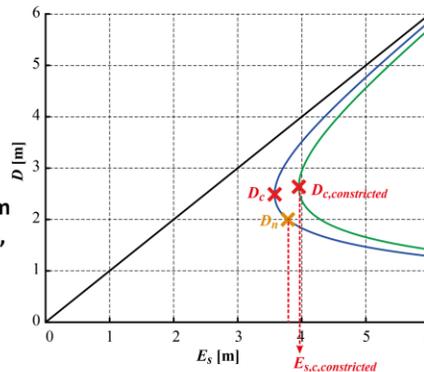
$$E_{s,constricted} = D + \frac{U^2}{2g} = D + \frac{Q^2}{2g(B_{bottom}D)^2}$$

Die spezifische Energiekurve in dem eingeschränkten Bereich für  $Q_{bankfull}$  ist grün gezeichnet.

2. Um wie viel müssen die Ufer erhöht werden, um die hydraulische Kapazität aufrecht zu erhalten, d. H. um Überschwemmungen zu vermeiden.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Auswirkung der Verengung auf die Wasseroberflächenhöhe analysieren.

Die spezifische Energie bei normalem Fluss in der stromaufwärts gelegenen Bereich  $E_{s,n}$  ist kleiner als die spezifische Energie für die kritische Strömung in dem eingeschnürten Bereich  $E_{s,c,constricted} = 3,95$  [m], was die minimale spezifische Energie ist, um den Uferdurchfluss durch den eingeschränkten Bereich zu befördern. Mit anderen Worten, der normale Strom stromaufwärts hat nicht genug spezifische Energie, um die Verengung zu passieren. Die Strömungstiefe stromaufwärts muss sich so ändern, dass die verfügbare spezifische Energie ansteigt.



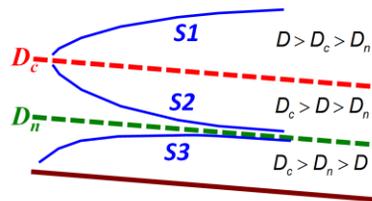
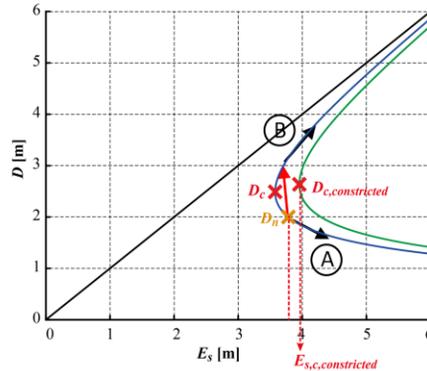
41

## Ex 4. Gerinneströmung. Lösung

Es gibt 2 Möglichkeiten um die spezifische Energie zu erhöhen:

1. Die Strömungstiefe kann im überkritischen Strömungsbereich abnehmen (Szenario A in der spezifischen Energiekurve). Aber es gibt keine mögliche Staukurve, die es ermöglicht, dass die normale Flusstiefe in einem steilen Gerinne in Stromabwärts-Richtung abnimmt (siehe Abbildung). Sobald die normale Flusstiefe in einem Bereich konstanter Geometrie (Bettneigung und Querschnittsform) erreicht wurde, kann sie sich nicht mehr ändern.
2. Die Flusstiefe kann im unterkritischen Flussbereich zunehmen (Szenario B in der spezifischen Energiekurve). Dies erfordert zunächst einen Wechsel vom überkritischen zum unterkritischen Strömungszustand, der durch einen hydraulischen Sprung erfolgt (roter Pfeil auf spezifischer Energiekurve). Die S1-Staukurve ermöglicht eine Erhöhung der spezifischen Energie bei steigender Flusstiefe.

→ Wir müssen zuerst Frage 3 beantworten um Frage 2 beantworten zu können.



42

### Ex 4. Gerinneströmung. Lösung

3. Ein hydraulischer Sprung wird stromaufwärts der Einschnürung auftreten. Berechnen Sie die konjugierten Flusstiefen (d. h. Die Flusstiefen unmittelbar stromaufwärts und stromabwärts des hydraulischen Sprungs) und die Energieverluste in dem hydraulischen Sprung.

Der hydraulische Sprung wird zwischen der normalen überkritischen Strömungstiefe stromaufwärts und seiner konjugierten unterkritischen Strömung stromabwärts auftreten, was sich aus dem folgenden ergibt (TH\_OpenChannelFlow3):

$$\frac{D_2}{D_n} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_n^2} - 1 \right) \quad \text{wobei } D_n = 2 \text{ [m] und } Fr_n = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gS^3}} = \frac{Q^2 \left( B_{bottom} + \frac{2D_n}{\tan \alpha} \right)}{g \left[ \left( B_{bottom} + \frac{D_n}{\tan \alpha} \right) D_n \right]^3} = 1.41$$
$$\rightarrow D_2 = 3.12 \text{ [m]}$$

Die Energieverluste im hydraulischen Sprung werden aus berechnet (TH\_OpenChannelFlow3):

$$\Delta E = \Delta E_s = \left( D_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left( D_2 + \frac{U_2^2}{2g} \right) = \frac{(D_2 - D_1)^3}{4D_1 D_2} = 0.056 \text{ [m]}$$

Mit dieser Information können wir nun Frage 2 beantworten.

## Ex 4. Gerinneströmung. Lösung

2. Um wie viel müssen die Ufer erhöht werden, um die hydraulische Kapazität aufrecht zu erhalten, d. H. um Überschwemmungen zu vermeiden.

Die spezifische Energie, die  $D_2$  entspricht, ist:  $E_{s,2} = D_2 + \frac{Q^2}{2g \left[ \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D_2}{\tan \alpha} \right) D_2 \right]^2} = 3.76 \text{ [m]}$

$E_{s,2} = 3.76 \text{ [m]} < E_{s,c,\text{constricted}} = 3.95 \text{ [m]}$ . Dies bedeutet, dass die spezifische Energie unmittelbar nach dem hydraulischen Sprung immer noch nicht ausreicht. Wie zuvor diskutiert, tritt ein weiterer Anstieg der spezifischen Energie durch eine Zunahme der Flusstiefe gemäß einer S1-Staukurve auf. Die Flusstiefe wird bis zu einer Flusstiefe  $D_3$  ansteigen, die gerade genug spezifische Energie aufweist, d. h. genau  $E_{s,3} = 3.95 \text{ [m]}$ .

$$E_{s,3} = 3.95 \text{ [m]} = D_3 + \frac{Q^2}{2g \left[ \left( B_{\text{bottom}} + \frac{D_3}{\tan \alpha} \right) D_3 \right]^2} \rightarrow D_3 = 3.44 \text{ [m]}$$

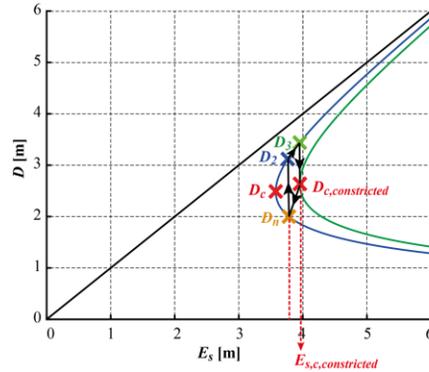
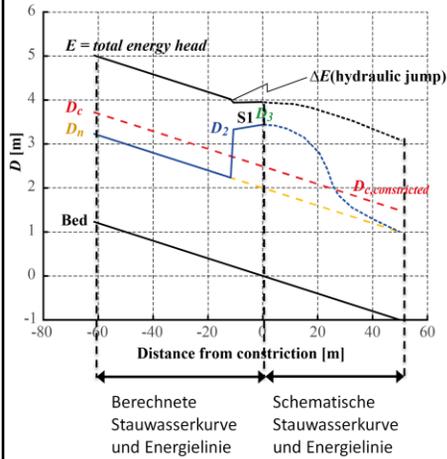
Bei dieser Flusstiefe  $D_3$  wird der Fluss von einem unterkritischen zu einem überkritischen Bereich durch einen plötzlichen Wasserpegelabfall wechseln.

Die maximale Flusstiefe ist  $D_{\text{max}} = D_3 = 3.44 \text{ [m]}$  was bedeutet, dass die Ufer um 1,44 [m] erhöht werden müssen, um Überschwemmungen zu vermeiden. Beachten Sie, dass die maximale Flusstiefe vor dem verengten Bereich liegt!

### Ex 4. Gerinneströmung. Lösung

4. Zeichnen Sie schematisch die Längsprofile des Flussbetts, die Wasseroberfläche und die Energielinie im Bereich stromaufwärts vor der Einschnürung; geben Sie auch die normalen und kritischen Fließtiefen an.

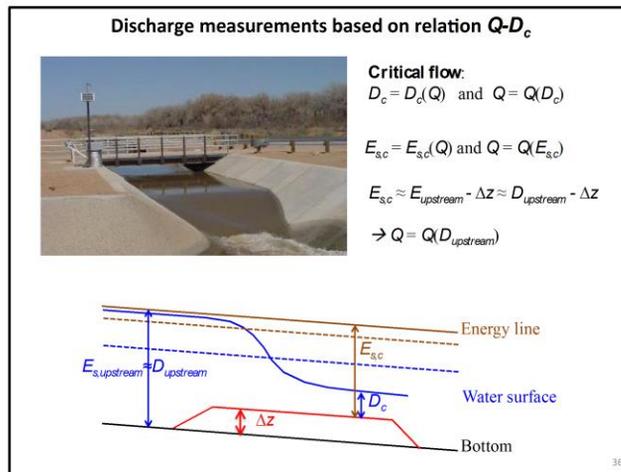
5. Veranschaulichen Sie die Entwicklung der Wassertiefe auf der spezifischen Energiekurve.



## Ex 5. Gerinneströmung

Wir haben in TH\_OpenChannelFlow\_1 gesehen, dass der Durchfluss gemessen werden kann, indem kritische Strömungsbedingungen auferlegt werden. Wir haben das Beispiel der Einführung einer kritischen Strömung mittels einer unteren Stufe behandelt (die relevante Folie ist in der folgenden Abbildung wiedergegeben).

Entwickeln Sie explizit die Beziehung  $Q = Q(D_{\text{upstream}})$  für ein rechteckiges Gerinne.



46

## Ex 5. Gerinneströmung. Lösung

Kritische Strömung ist definiert durch:

$$\frac{Q^2}{gS^3(D_c)} B(D_c) = 1 \rightarrow Q = g^{1/2} S^{3/2} (D_c) B^{-1/2} (D_c) \longrightarrow$$

Die spezifische Energie für die kritische Strömung ist:

$$E_{s,c} = D_c + \frac{U_c^2}{2g} = D_c + \frac{Q^2}{2gS^3(D_c)} = D_c + \frac{S(D_c)}{2B(D_c)} \longrightarrow E_{s,c} = \frac{3}{2} D_c$$

$$E_{s,c} \approx E_{upstream} - \Delta z \approx D_{upstream} - \Delta z$$

**Rechteckiges Gerinne:  $S = BD$**

$$Q = g^{1/2} B D_c^{3/2}$$

$$Q = g^{1/2} B \left[ \frac{2}{3} (D_{upstream} - \Delta z) \right]^{3/2}$$

$$E_{s,c} = \frac{3}{2} D_c$$

## Ex 6. Gerinneströmung

Ein Durchfluss von  $Q = 12 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$  fließt in einem 2 [m] weiten rechteckigen Gerinne. Der Manning-Strickler Rauigkeitsbeiwert wird mit  $K_s = 40 \text{ [m}^{1/3} \text{ s}^{-1}\text{]}$  angenommen. Das Strömungsregime wird offensichtlich von der Gerinnesteigung abhängen. Bei einer leichten Steigung neigt die Strömung dazu, unterkritisch zu sein, während sie bei einer steilen Steigung eher überkritisch ist. Bestimmen Sie die kritische Steigung, d. h. jene Steigung, die zwischen leicht geneigten (M-Typ Stauwasserkurven) und stark geneigten (S-Typ Stauwasserkurven) Charakterisierungen des Gerinnes für den gegebenen Durchfluss unterscheidet.

## Ex 6. Gerinneströmung. Lösung

- Definitionen (TH\_OpenChannelFlow2):  $D_n > D_c$  für ein leicht geneigtes Gerinne,  $D_n < D_c$  für ein steiles Gerinne, und  $D_n = D_c$  bei der kritischen Steigung.
  - $D_c$  ist nur abhängig vom Durchfluss und vom Querschnitt (TH\_OpenChannelFlow1)
  - $D_n$  ist abhängig vom Durchfluss, dem Querschnitt, dem Rauigkeitsbeiwert, und dem Sohlgefälle (TH\_OpenChannelFlow1)
- Für einen gegebenen Durchfluss, Querschnitt und Rauheitsbeiwert wird die Gerinne Charakterisierung (leichte Steigung oder starke Steigung) abhängig vom Sohlgefälle sein.

- Wir erhalten  $D_c$  aus:  $\frac{Q^2 B}{g S^3} = \frac{Q^2}{g B^2 D_c^3} = 1 \rightarrow D_c = \left[ \frac{(Q/B)^2}{g} \right]^{1/3} = 1.54 \text{ [m]}$

- Bei kritischer Steigung gilt  $D_n = D_c = 1.54 \text{ [m]}$
- Der Zusammenhang zwischen  $Q$  und  $D_n$  ist gegeben durch (TH\_OpenChannelFlow1):

$$Q = US = K_s R_h^{2/3} J_f^{1/2} S \quad \text{mit } K_s \text{ dem Manning-Strickler Rauigkeitsbeiwert}$$

$$\rightarrow J_{f, \text{crit}} = \left( \frac{Q}{K_s R_h^{2/3} S} \right)^2 = \left( \frac{Q}{K_s \left( \frac{B D_n}{B + 2 D_n} \right)^{2/3} (B D_n)} \right)^2 = 0.0184 \text{ [-]}$$

49