Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 5. Oktober 2009

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

In einem Bandpass-PAM-System sei der empfangene Impuls

$$h(t) = e^{-ct}\,\mathrm{u}(t), \quad \text{wobei } c > 0.$$

Mit $\mathrm{u}(t)$ wird hier die Sprungfunktion bezeichnet, d.h.

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Das Rauschen $N(t)$ ist weiß; seine spektrale Leistungsdichte beträgt $N_0/2$. Nach dem Empfangsfilter $f(t)$ wird das Signal im Symboltakt abgetastet. Darauf folgt ein linearer *zero forcing* (ZF)-Entzerrer.

a) Betrachten Sie zunächst den Fall $f(t) = \delta(t)$, d.h. der Gesamtpuls ist $p(t) = h(t)$.

- **a1)** Geben Sie den äqivalenten zeitdiskreten Impuls $p[k]$ am Eingang des Entzerrers an. (Hinweis: Verwenden Sie die zeitdiskrete Sprungfunktion $\mathrm{u}[k]$.) Wie groß ist die Varianz des äquivalenten zeitdiskreten Rauschens σ_Z^2?
- **a2)** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des linearen ZF-Entzerrers.
- **a3)** Nehmen Sie nun $S_Z(e^{j\theta}) = 1$ an. Berechnen Sie die spektrale Leistungsdichte des Rauschens $U[k]$ am Ausgang des Entzerrers.

b) Betrachten Sie nun jenes Empfangsfilter, das die Rauschverstärkung durch den linearen ZF-Entzerrer minimiert.

- **b1)** Geben Sie die Impulsantwort $f(t)$ dieses Empfangsfilters an.
- **b2)** Berechnen Sie den äqivalenten zeitdiskreten Impuls $p[k]$ am Eingang des Entzerrers.
- **b3)** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des linearen ZF-Entzerrers.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Es wird die Entzerrung eines Kanals mittels Decision Feedback-Entzerrer betrachtet. Der äquivalente zeitdiskrete Basisband-Impuls ist gegeben durch

$$p[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1] - \frac{1}{2}\delta[k+1].$$

Die Sendesymbole stammen aus dem Alphabet $\{1, -1\}$ und sind gleichwahrscheinlich. Die Symbolfolge und das äquivalente zeitdiskrete Rauschen sind unkorreliert und beide weiß. Das Rauschen ist mittelwertfrei, d.h. $R_Z[k] = \sigma_Z^2\delta[k]$. Die Varianz des Rauschens beträgt $\sigma_Z^2 = 1/4$.

a) Nehmen Sie ein allgemeines Feedforward-Filter $d[k], k \in [-L, L]$ an. Berechnen Sie den äquivalenten Impuls $p^{(d)}[k]$ am Ausgang des Feedforward-Filters. Wie lang ist dieser Impuls?

b) Betrachten Sie nun den Fall $L = 1$. Welche Länge K muss das Feedback-Filter mindestens haben, um möglichst viel ISI zu kompensieren (unter der Annahme, dass alle vorherigen Entscheidungen richtig waren)?

c) Das Feedforward-Filter hat die Koeffizienten $\mathbf{d}_{\mathrm{MSE}} = (1/17)\cdot(2\ \ 10\ \ {-8})^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie die Koeffizienten des Feedback-Filters (mit der in **b)** berechneten Länge K), die den MSE am Eingang des Entscheiders minimieren.

d) Geben Sie das Eingangssignal des Entscheiders an und kennzeichnen Sie jene Anteile, die 1.) das erwünschte Signal, 2.) ISI und 3.) additives Rauschen darstellen. (Es gilt weiterhin die Annahme, dass alle vorangegangenen Entscheidungen richtig waren.)

e) Berechnen Sie die mittleren Leistungen der drei Signalanteile von Punkt **d)**.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Mittels Bandpass-PAM werden weiße Daten (Bitrate $R_b = 64\,\mathrm{kbit/s}$) über einen bandbegrenzten AWGN-Kanal (spektrale Rauschleistungsdichte $N_0 = 9 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$, Bandbreite $B_c = 20\,\mathrm{kHz}$) übertragen. Das Spektrum des Sendeimpulses ist durch $G(j\omega) = \sqrt{R(j\omega)}$ gegeben, wobei $R(j\omega)$ das Spektrum eines *raised–cosine* Impulses mit $\alpha = 0.5$ ist. Zur Übertragung wird eine M_a-QAM Signalkonstellation verwendet, wobei Symbole mit positivem Realteil doppelt so wahrscheinlich gesendet werden wie Symbole mit negativem Realteil.

a) Berechnen Sie die mindestens erforderliche Anzahl M_a der Symbole im Symbolalphabet. (Hinweis: Mögliche Werte für M_a sind $4n^2$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$.) Skizzieren Sie die entsprechende Signalkonstellation.

b) Entwerfen Sie das Empfangsfilter für ISI-freie Übertragung und skizzieren Sie das Blockschaltbild des entsprechenden ML-Empfängers.

c) Berechnen Sie den minimalen Symbolabstand d_a für Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} = 10^{-7}$. Verwenden Sie dazu die Näherung $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} \approx \overline{\mathcal{N}}\,\mathcal{Q}\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\sigma_Z}\right)$.

d) Wie muß man diese Konstellation verschieben, um die Sendeleistung $P_{\tilde{S}}$ zu minimieren? Skizzieren Sie die verschobene Signalkonstellation. Um wieviel wird die Sendeleistung durch diese Verschiebung verringert?

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Bei der Übertragung über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-5}$W/Hz wird aus den folgenden vier Sendesignalen ausgewählt:

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= A \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{rect}\left(t; \tfrac{T}{2}\right) \\ s^{(2)}(t) &= -A \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{rect}\left(t; \tfrac{T}{2}\right) \\ s^{(3)}(t) &= A \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{rect}\left(t; \tfrac{T}{2}\right) \operatorname{sgn}(t) \\ s^{(4)}(t) &= -A \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{rect}\left(t; \tfrac{T}{2}\right) \operatorname{sgn}(t) \end{aligned} \qquad \text{mit } \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

wobei $A^2 = 0.6$W, $T = 6 \cdot 10^{-5}$s.

a) Skizzieren Sie die vier Sendesignale.

b) Die Sendesignale sollen durch eine orthogonale (nicht notwendigerweise orthonormale) Basis dargestellt werden.

b1) Als erste Basisfunktion wird $s^{(1)}(t)$ verwendet. Welche der Sendesignale sind als zweite Basisfunktion geeignet, welche nicht?

b2) Wählen Sie eines der Sendesignale als zweite Basisfunktion aus und normieren Sie nun die beiden Basisfunktionen. Stellen Sie die vier Sendesignale als Koeffizientenvektoren dar. Wie groß sind die Varianzen der Entwicklungskoeffizienten des Rauschens?

c) Skizzieren Sie die Lage der Sendesignale als Punkte im zweidimensionalen Vektorraum. Skizzieren Sie weiters die Entscheidungsregionen des ML-Folgendetektors (ML sequence detector).

d) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit des ML-Folgendetektors.