# Modulations- und Detektionsverfahren

## Schriftliche Prüfung am 10. März 2008

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

**Bitte beachten Sie:**

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

**Aufgabe 1 (20 Punkte)**

Es wird die Übertragung eines Symbols $A \in \{0, \pi\}$ über einen Kanal mit additivem Rauschen $N$ betrachtet, das gemäß

$$f_N(n) = c\ (1 - \cos n)\ \mathrm{rect}(n; 2\pi)$$

verteilt ist. Die Sendewahrscheinlichkeiten seien durch $\mathrm{P}\{A = 0\} = p$ definiert.

**a)** Skizzieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{Y|A}(y|0)$ des empfangenen Signals $y$ für den Fall $A = 0$.

**b)** Berechnen Sie die Konstante $c$ und die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers.

**c)** Berechnen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers. Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit?

**d)** Der Empfänger erhält nun als weitere Information das Vorzeichen des Rauschens $N$ und verwendet dieses zusätzlich zur Detektion.

- **d1)** Nehmen Sie $N > 0$ an. Skizzieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Rauschens für $N > 0$.
- **d2)** Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers unter der Annahme $N > 0$ sowie unter der Annahme $N < 0$.
- **d3)** Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des ML-Empfängers, der das Vorzeichen von $N$ kennt?

**Aufgabe 2 (20 Punkte)**

In einem Bandpass-PAM-System sei der Empfangsimpuls durch

$$h(t) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{T_s}}\,\mathrm{rect}\Big(t - \frac{T_s}{2}; \frac{T_s}{2}\Big) + \sqrt{\frac{3\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{T_s}}\,\left(2 - \frac{t}{T_s}\right)\mathrm{rect}\Big(t - \frac{3}{2}T_s; \frac{T_s}{2}\Big)$$

gegeben.

**a)** Berechnen Sie die Impulsantwort $\rho_h[k]$ und die Übertragungsfunktion $S_h(z)$ des äquivalenten zeitdiskreten Systems (inklusive des im Symboltakt abgetasteten signalangepassten Filters).

**b)** Geben Sie die Nullstellen und Pole von $S_h(z)$ an.

**c)** Berechnen Sie den linearen *zero forcing*-Entzerrer und geben Sie dessen Pole an.

**d)** Finden Sie eine minimalphasige Faktorisierung von $S_h(z)$.

**e)** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des äquivalenten zeitdiskreten Systems inklusive des *noise whitening*-Filters.

**Aufgabe 3 (20 Punkte)**

Mittels Bandpass-PAM werden weiße Daten (Bitrate $R_b = 64\,\text{kbit/s}$) über einen bandbegrenzten AWGN-Kanal (spektrale Rauschleistungsdichte $N_0 = 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{W}}{\text{Hz}}$, Bandbreite $B_c = 26\,\text{kHz}$) übertragen. Das Spektrum des Sendeimpulses ist durch $G(j\omega) = \sqrt{R(j\omega)}$ gegeben, wobei $R(j\omega)$ das Spektrum eines *raised–cosine* Impulses mit $\alpha = 0.5$ ist. Zur Übertragung wird eine $M_a$-QAM Signalkonstellation verwendet, wobei Symbole mit positivem Realteil dreimal so wahrscheinlich gesendet werden wie Symbole mit negativem Realteil.

**a)** Berechnen Sie die mindestens erforderliche Anzahl $M_a$ der Symbole im Symbolalphabet. Skizzieren Sie die entsprechende Signalkonstellation.

**b)** Entwerfen Sie das Empfangsfilter für ISI-freie Übertragung und skizzieren Sie das Blockschaltbild des entsprechenden ML-Empfängers.

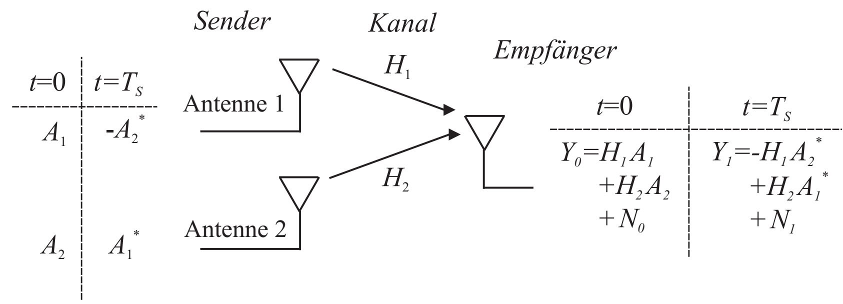
**c)** Berechnen Sie den minimalen Symbolabstand $d_a$ für Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} = 6 \cdot 10^{-8}$. Verwenden Sie dazu die Näherung $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} \approx \overline{\mathcal{N}}\,\mathcal{Q}\Big(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\sigma_Z}\Big)$.

**d)** Berechnen Sie die mittlere Sendeleistung $P_{\bar{S}}$.

**e)** Wie muß man die $M_a$-QAM Konstellation verschieben, um die Sendeleistung zu minimieren? Skizzieren Sie die verschobene Signalkonstellation. Wie groß ist die entsprechende minimale mittlere Sendeleistung $P_{\bar{S},\min}$?

**Aufgabe 4 (20 Punkte)**

In diesem Beispiel soll ein orthogonaler Raum-Zeit-Code (ein sogenannter "Alamouti-Code") für zwei Sendeantennen und eine Empfangsantenne untersucht werden:




Es werden zwei Symbolzeitpunkte ($t$=0, $t$=$T_s$) betrachtet:

- Antenne 1 sendet Symbole $A_1$ $(t = 0)$ und $-A_2^*$ $(t = T_s)$.
- Antenne 2 sendet Symbole $A_2$ $(t = 0)$ und $A_1^*$ $(t = T_s)$.

Hierbei sind $A_1, A_2 \in \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$ (die Sendesymbole sind gleichwahrscheinlich und statistisch unabhängig) und $H_1, H_2$ sind die Kanalschwundkoeffizienten zwischen den Antennen. Weiters bezeichnet $Y_i$ den Empfangswert und $N_i$ das additive Rauschen zum $i$-ten Zeitpunkt. Alle Größen sind komplexwertig. Die Rauschwerte sind zirkulärsymmetrisch normalverteilt mit Mittelwert $\mathrm{E}\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix $\mathbf{R_n} = \mathrm{E}\{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^H\} = \sigma_n^2\,\mathbf{I}$, wobei $\mathbf{n} = (N_0\ N_1)^T$.

**a)** Mit welcher Nutz-Bitrate $R_b$ wird übertragen? ($T_s = 1$ms)

**b)** Die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Übertragungssystems lässt sich wie folgt anschreiben (vgl. Abbildung):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1^* \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} . \tag{1}$$

Spezifizieren Sie $\mathbf{H}$ und $\mathbf{w}$.

**c)** Berechnen Sie den Empfangsvektor nach "signalangepasster Filterung"

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H\,\mathbf{y} \tag{2}$$

als Funktion von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$. Vereinfachen Sie $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ so weit wie möglich.

**d)** Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz des Rauschens nach der signalangepassten Filterung. Geben Sie die Korrelationsmatrix des gefilterten Rauschens an. Sind die beiden Komponenten des Rauschens auch nach dieser Filterung statistisch unabhängig?

**e)** Entwerfen Sie einen ML-Empfänger für $A_1$ und $A_2$ und geben Sie einen *exakten* Ausdruck für die entsprechenden Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten an.