

# Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 12. Jänner 2009

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

**Bitte beachten Sie:**

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

### Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein Sendesymbol  $a \in \{1, j, -1, -j\}$  wird von einem diskreten Kanal gemäß folgender Regel auf ein empfangenes Symbol  $y$  abgebildet:

- Mit Wahrscheinlichkeit 0.6 gilt  $y = j \cdot a$ ;
- mit Wahrscheinlichkeit 0.4 gilt  $y = a^*$ .

Das empfangene Symbol  $y$  stammt daher aus demselben Alphabet  $\{1, j, -1, -j\}$ .

- a) Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm über dem Symbolalphabet mit allen möglichen Übergängen von  $a$  auf  $y$ .
- b) Geben Sie zu jedem Übergang die zugehörige Wahrscheinlichkeit  $p(y|a)$  an.
- c) Zu jedem möglichen Empfangssymbol  $y \in \{1, j, -1, -j\}$  gibt der ML-Detektor ein detektiertes Symbol  $\hat{a}_{\text{ML}} \in \{1, j, -1, -j\}$  aus. Geben Sie die Funktion  $\hat{a}_{\text{ML}}(y)$  an.

Das Sendesymbol ist zwei Sendebits  $(b_1, b_2)$  zugeordnet, wobei sich im Alphabet benachbarte Symbole nur in einem Bit unterscheiden. Die Bits  $b_1, b_2$  sind statistisch unabhängig, mit  $p(0) = 0.7$ .

- d) Geben Sie zu jedem Übergang die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit  $p(a|y)$  an (die Normierung durch den Faktor  $1/p(y)$  kann weggelassen werden).
- e) Zu jedem möglichen Empfangssymbol  $y \in \{1, j, -1, -j\}$  gibt der MAP-Detektor ein detektiertes Symbol  $\hat{a}_{\text{MAP}} \in \{1, j, -1, -j\}$  aus. Geben Sie die Funktion  $\hat{a}_{\text{MAP}}(y)$  an.
- f) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten des ML-Detektors und des MAP-Detektors.

## Aufgabe 2 (20 Punkte)

Ein Übertragungssystem mit AWGN-Kanal verwendet folgende Signale:

$$s^{(i)}(t) = (T - 2|t|) \operatorname{rect}\left(t - iT; \frac{T}{2}\right), \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

- a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis des Signalraums.
- b) Geben Sie die Signale  $s^{(i)}(t)$  als Vektoren an.
- c) Skizzieren Sie eine Implementierung des ML-Folgendetektors (ML sequence detector), bei der die Inprodukte des Empfangssignals mit den Basisfunktionen verwendet werden.
- d) Skizzieren Sie eine Implementierung des ML-Folgendetektors (ML sequence detector), bei der die Inprodukte des Empfangssignals mit den Signalen aus dem Signalalphabet verwendet werden.
- e) Welche Implementierung ist effizienter?
- f) Berechnen Sie den Union Bound für die Fehlerwahrscheinlichkeit des ML-Folgendetektors. Nehmen Sie dabei an, dass alle vier Signale  $s^{(i)}(t)$  gleich wahrscheinlich sind.

### Aufgabe 3 (20 Punkte)

Mittels Bandpass-PAM werden weiße Daten (Bitrate  $R_b = 32 \text{ kbit/s}$ ) über einen bandbegrenzten AWGN-Kanal (spektrale Rauschleistungsdichte  $N_0 = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$ , Bandbreite  $B_c = 26 \text{ kHz}$ ) übertragen. Das Spektrum des Sendeimpulses ist durch  $G(j\omega) = \sqrt{R(j\omega)}$  gegeben, wobei  $R(j\omega)$  das Spektrum eines *raised-cosine* Impulses mit  $\alpha = 0.5$  ist. Zur Übertragung wird eine  $M_a$ -QAM Signalkonstellation verwendet, wobei Symbole mit negativem Realteil dreimal so wahrscheinlich gesendet werden wie Symbole mit positivem Realteil.

- a) Berechnen Sie die mindestens erforderliche Anzahl  $M_a$  der Symbole im Symbolalphabet. Skizzieren Sie die entsprechende Signalkonstellation.
- b) Entwerfen Sie das Empfangsfilter für ISI-freie Übertragung und skizzieren Sie das Blockschaltbild des entsprechenden ML-Empfängers.
- c) Berechnen Sie den minimalen Symbolabstand  $d_a$  für Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P\{\mathcal{E}_s\} = 4 \cdot 10^{-8}$ . Verwenden Sie dazu die Näherung  $P\{\mathcal{E}_s\} \approx \overline{\mathcal{N}}\mathcal{Q}\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\sigma_Z}\right)$ .
- d) Berechnen Sie die mittlere Sendeleistung  $P_{\bar{S}}$ .
- e) Wie muß man die  $M_a$ -QAM Konstellation verschieben, um die Sendeleistung zu minimieren? Skizzieren Sie die verschobene Signalkonstellation. Wie groß ist die entsprechende minimale mittlere Sendeleistung  $P_{\bar{S},\min}$ ?

#### Aufgabe 4 (20 Punkte)

In einem Bandpass-PAM-System sei der Empfangsimpuls durch

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \operatorname{rect}\left(t; \frac{T_s}{2}\right) - \sqrt{\frac{2}{T_s}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{3}{4}T_s; \frac{T_s}{4}\right)$$

gegeben.

- a) Berechnen Sie die Impulsantwort  $\rho_h[k]$  und die Übertragungsfunktion  $S_h(z)$  des äquivalenten zeitdiskreten Systems (inklusive des im Symboltakt abgetasteten signalangepassten Filters).
- b) Geben Sie die Nullstellen und Pole von  $S_h(z)$  an.
- c) Berechnen Sie den linearen *zero forcing*-Entzerrer und geben Sie dessen Pole an.
- d) Finden Sie eine minimalphasige Faktorisierung von  $S_h(z)$ .
- e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des äquivalenten zeitdiskreten Systems inklusive des *noise whitening*-Filters.