Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 10. November 2008

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Bei der Übertragung über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-6}$W/Hz wird aus den folgenden vier Sendesignalen ausgewählt:

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= A\cos\left(\tfrac{\pi}{T}t\right)\operatorname{rect}\left(t;\tfrac{T}{2}\right) \\ s^{(2)}(t) &= -A\cos\left(\tfrac{\pi}{T}t\right)\operatorname{rect}\left(t;\tfrac{T}{2}\right) \\ s^{(3)}(t) &= A\cos\left(\tfrac{\pi}{T}t\right)\operatorname{rect}\left(t;\tfrac{T}{2}\right)\operatorname{sgn}(t) \\ s^{(4)}(t) &= -A\cos\left(\tfrac{\pi}{T}t\right)\operatorname{rect}\left(t;\tfrac{T}{2}\right)\operatorname{sgn}(t) \end{aligned} \qquad \text{mit } \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

wobei $A^2 = 0.9$W, $T = 4 \cdot 10^{-5}$s.

a) Skizzieren Sie die vier Sendesignale.

b) Die Sendesignale sollen durch eine orthogonale (nicht notwendigerweise orthonormale) Basis dargestellt werden.

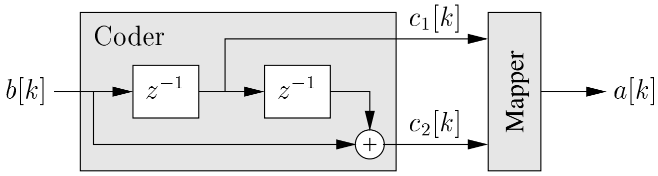
- **b1)** Als erste Basisfunktion wird $s^{(1)}(t)$ verwendet. Welche der Sendesignale sind als zweite Basisfunktion geeignet, welche nicht?
- **b2)** Wählen Sie eines der Sendesignale als zweite Basisfunktion aus und normieren Sie nun die beiden Basisfunktionen. Stellen Sie die vier Sendesignale als Koeffizientenvektoren dar. Wie groß sind die Varianzen der Entwicklungskoeffizienten des Rauschens?
- **b3)** Skizzieren Sie die Lage der Sendesignale als Punkte im zweidimensionalen Vektorraum.

c) Nehmen Sie nun folgende Sendewahrscheinlichkeiten an: $p_I(1) = 3/8$, $p_I(2) = 1/8$, $p_I(3) = 3/8$, $p_I(4) = 1/8$.

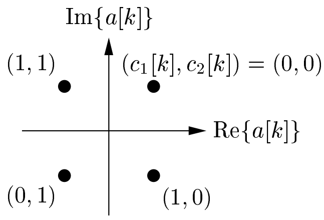
- **c1)** Skizzieren Sie die Entscheidungsregionen des ML-Folgendetektors (ML sequence detector).
- **c2)** Skizzieren Sie die Entscheidungsregionen des MAP-Folgendetektors (MAP sequence detector).
- **c3)** Berechnen Sie die bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten des MAP-Folgendetektors für $i = 1, \ldots, 4$ und die unbedingte Fehlerwahrscheinlichkeit des MAP-Folgendetektors.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Im Folgenden soll ein System mit trellis-codierter Modulation (TCM) untersucht werden. Der Sender besteht hierbei aus einem Faltungscodierer und einem Symbol-Mapper (s. Abbildung).



TCM-Sender



Mapper

Der Faltungscodierer erzeugt aus den Sendebits $b[k]$ in jedem Schritt zwei Codebits $c_1[k] = b[k-1]$ und $c_2[k] = b[k] \oplus b[k-2]$ ($\oplus$ bezeichnet Addition modulo 2). Diese werden vom Symbol-Mapper auf die Symbole $a[k]$ (mit $|a[k]|^2 = 8$) abgebildet.

Die Empfangswerte sind durch $y[k] = a[k] + w[k]$ gegeben (ISI-freier Kanal). Das komplexwertige, weiße Rauschen $w[k]$ ist laplaceverteilt, d.h.

$$f_w(\xi) = \frac{1}{2} e^{-|\xi|}.$$

a) Bestimmen Sie für die Bitfolge $\{1, 1, 0, 0, 1\}$ die zugehörigen Codebits $c_1[k]$, $c_2[k]$ und Sendesymbole $a[k]$ (nehmen Sie an, dass alle vorhergehenden Sendebits $b[k]$ Null waren).

b) Skizzieren Sie ein Trellisdiagramm für den TCM-Sender.

c) Zur Detektion der gesendeten Bitfolge wird ein ML-Empfänger mit dem Viterbi-Algorithmus implementiert. Berechnen Sie einen Ausdruck für die Pfadmetrik des Viterbi-Algorithmus.

d) Verwenden Sie den Viterbi-Algorithmus (mit obiger Metrik), um aus der Empfangsfolge $y[0] = -0.1 - j0.4$, $y[1] = -0.8 + j0.2$, $y[2] = 0.7 - j0.9$ detektierte Bits $\hat{b}[k]$ zu bestimmen (gehen Sie dabei von $b[k] = 0$ für $k < 0$ aus).

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Weiße Symbole $a[k]$ aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$ werden über einen zeitdiskreten AWGN-Kanal mit Impulsantwort $h[k] = 2\delta[k] - \frac{2}{3}\delta[k-1]$ und Rauschvarianz σ_z^2 übertragen. Am Ausgang des Kanals wird die Folge $y[k] = (h * a)[k] + z[k]$ empfangen.

a) Betrachten Sie zunächst eine symbolweise Entscheidung von $y[k]$.

a1) Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k] \,|\, a[k] = \alpha, a[k-1] = \beta\}$ für $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

a2) Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$.

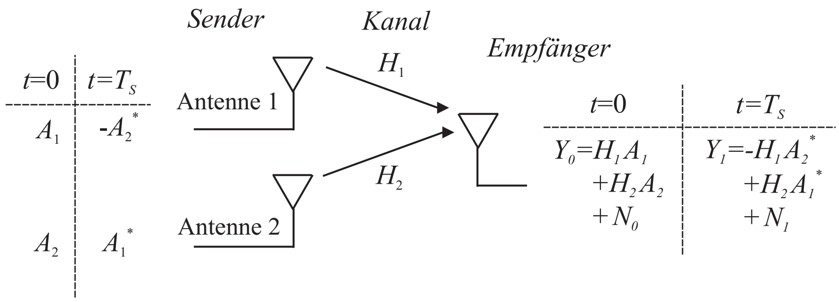
b) Betrachten Sie nun einen Empfänger, bei dem die Folge $y[k]$ zunächst mit einem Zero-Forcing-Filter entzerrt und danach symbolweise detektiert wird.

b1) Geben Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des Zero-Forcing-Entzerrers an und berechnen Sie die Varianz des gefilterten Rauschens nach dem Entzerrer.

b2) Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$ des Zero-Forcing-Detektors und vergleichen Sie diese mit der in Punkt a2) berechneten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit der symbolweisen Detektion.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

In diesem Beispiel soll ein orthogonaler Raum-Zeit-Code (ein sogenannter "Alamouti-Code") für zwei Sendeantennen und eine Empfangsantenne untersucht werden:



Es werden zwei Symbolzeitpunkte (t=0, t=T_s) betrachtet:

- Antenne 1 sendet Symbole A_1 $(t = 0)$ und $-A_2^*$ $(t = T_s)$.
- Antenne 2 sendet Symbole A_2 $(t = 0)$ und A_1^* $(t = T_s)$.

Hierbei sind $A_1, A_2 \in \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$ (die Sendesymbole sind gleichwahrscheinlich und statistisch unabhängig) und H_1, H_2 sind die Kanalschwundkoeffizienten zwischen den Antennen. Weiters bezeichnet Y_i den Empfangswert und N_i das additive Rauschen zum i-ten Zeitpunkt. Alle Größen sind komplexwertig. Die Rauschwerte sind zirkulärsymmetrisch normalverteilt mit Mittelwert $\mathrm{E}\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix $\mathbf{R_n} = \mathrm{E}\{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^H\} = \sigma_n^2\,\mathbf{I}$, wobei $\mathbf{n} = (N_0\ N_1)^T$.

a) Mit welcher Nutz-Bitrate R_b wird übertragen? ($T_s = 0.2$ms)

b) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Übertragungssystems lässt sich wie folgt anschreiben (vgl. Abbildung):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1^* \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} . \qquad (1)$$

Spezifizieren Sie $\mathbf{H}$ und $\mathbf{w}$.

c) Berechnen Sie den Empfangsvektor nach "signalangepasster Filterung"

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H\,\mathbf{y} \qquad (2)$$

als Funktion von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$. Vereinfachen Sie $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ so weit wie möglich.

d) Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz des Rauschens nach der signalangepassten Filterung. Geben Sie die Korrelationsmatrix des gefilterten Rauschens an. Sind die beiden Komponenten des Rauschens auch nach dieser Filterung statistisch unabhängig?

e) Entwerfen Sie einen ML-Empfänger für A_1 und A_2 und geben Sie einen *exakten* Ausdruck für die entsprechenden Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten an.