Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 9. November 2009

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein Übertragungssystem verwendet vier Signale aus einem zweidimensionalen Signalraum, die über einen AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte $N_0/2 = 10^{-6}$W/Hz übertragen werden. Die vier Signalvektoren sind

$$\mathbf{s}^{(1)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(3)} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(4)} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $c^2 = 9\mu$J. Die Sendewahrscheinlichkeiten betragen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$. Die verwendeten Basisfunktionen sind

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \frac{0.6}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) + \frac{0.8}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{3T}{2}; \frac{T}{2}\right), \\
\phi_2(t) &= -\frac{0.8}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) + \frac{0.6}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{3T}{2}; \frac{T}{2}\right).
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Basis orthonormal ist.

b) Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}_{\mathrm{MAP}}\{\mathcal{E}|I = i\}$ des MAP-Empfängers für $i = 1, 2, 3, 4$.

c) Berechnen Sie den *union bound* der bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten für $i = 1, 2, 3, 4$.

d) Berechnen Sie die unbedingte Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}_{\mathrm{MAP}}\{\mathcal{E}\}$ des MAP-Empfängers sowie den *union bound* der unbedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Es soll ein Bandpass-PAM-System mit Symbolalphabet $\mathcal{A} = \{-2, 2, -3j\}$ untersucht werden, wobei die Symbole als statistisch unabhängig und gleichverteilt angenommen werden.

a) Berechnen Sie die Symbolleistung P_A. Um wieviel muss das Symbolalphabet verschoben werden, um die Symbolleistung zu minimieren?

Im Folgenden wird das verschobene Symbolalphabet verwendet.

b) Zur Übertragung wird die Symbolfolge $a[k]$ in eine Folge $b[k] = a[k] - \alpha a[k-2]$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ transformiert. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_B(e^{j\theta})$ der transformierten Symbole $B[k]$.

c) Das Sendesignal im äquivalenten Basisband ist $s_{\mathrm{LP}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k] g(t - kT_s)$. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{\bar{S}_{\mathrm{LP}}}(j\omega)$ des stationarisierten Sendesignals $\bar{S}_{\mathrm{LP}}(t)$.

d) Bei der Frequenz $\omega = \frac{\pi}{2T_s}$ soll das Spektrum $S_{\bar{S}_{\mathrm{LP}}}(j\omega)$ eine Nullstelle haben. Wie muss α gewählt werden, damit diese Bedingung erfüllt ist ?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Ein Sendesymbol a aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{-\frac{d}{4}, \frac{3d}{4}\}$ wird mit der Wahrscheinlichkeit $p_A(-\frac{d}{4}) = \frac{3}{4}$ gesendet und durch additives Rauschen z gestört:

$$q = a + z.$$

Das Rauschen ist dreiecksverteilt:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{|z|}{\epsilon}\right) \mathrm{rect}(z; \epsilon),$$

mit dem zunächst unbekannten Parameter ϵ.

a) Skizzieren Sie $f_Z(z)$.

b) Nehmen Sie nun $\epsilon = \frac{d}{2}$ an.

- **b1)** Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Diagramm $f_{Q|A}\big(q| - \frac{d}{4}\big)$ und $f_{Q|A}\big(q|\frac{3d}{4}\big)$, jeweils gewichtet mit $p_A(a)$.
- **b2)** Geben Sie die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers an. Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des MAP-Empfängers?

c) Wiederholen Sie die Punkte **b1)** und **b2)** unter der Annahme $\epsilon = d$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Eine Folge statistisch unabhängiger und gleichwahrscheinlicher binärer Symbole $A[k] \in \{-1, 1\}$ wird über einen zeitdiskreten Kanal übertragen. Der Kanal ist dispersiv und *nichtlinear* mit der Eingangs-/Ausgangsbeziehung

$$b[k] = 0.5\, a[k] + 0.3\, a[k-1] - 0.7\, a[k]\, a[k-2].$$

Die empfangene Folge ist durch $y[k] = b[k] + n[k]$, $k = 1, \ldots, K$ gegeben, wobei das Rauschen $n[k]$ folgendermaßen verteilt ist:

$$f_N(n) = \frac{\ln 2}{2}\, 2^{-|n|}\,.$$

Die Rauschwerte $n[k]$ sind statistisch unabhängig.

a) Modellieren Sie das System als (nichtlinearen) Schieberegisterprozess. Zeichnen sie das Zustandsübergangsdiagramm und eine Stufe des Trellisdiagramms.

b) **b1)** Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Folgendetektors.

b2) Zeigen Sie, dass sich dieser ML-Folgendetektor mit dem Viterbi-Algorithmus und einer geeigneten Zweigmetrik implementieren lässt.

b3) Bestimmen Sie für die Empfangsfolge $y[0] = -0.9$, $y[1] = 1.1$ und $y[2] = -0.2$ die mit dem ML-Empfänger detektierte Symbolfolge. Nehmen Sie dabei $a[k] = -1$ für $k < 0$ an.