Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 14. Jänner 2008

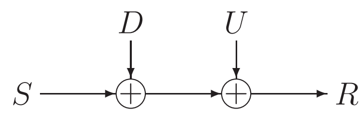
Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Die Übertragung eines Symbols S aus dem Alphabet $\{0, A\}$ wird durch einen Störsender und durch Rauschen beeinträchtigt:



Der Störer sendet Symbole D gleichwahrscheinlich aus dem Alphabet $\{-A, A\}$. Das additive Rauschen U hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} - \dfrac{|u|}{A^2} & \text{für } |u| \leq A\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Symbol S, Störer D und Rauschen U sind statistisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers und die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass kein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + U$.

b) Es wird wieder angenommen, dass kein Störer vorhanden ist. Berechnen Sie die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers und die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für $\mathrm{P}\{S = 0\} = 1/4$.

c) Fassen Sie nun Störsender und Rauschen zu einer Gesamtstörung $N = D + U$ zusammen. Berechnen und skizzieren Sie die bedingten WDF $f_{N|D}(n|d = -A)$ und $f_{N|D}(n|d = A)$ sowie die WDF $f_N(n)$.

d) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers sowie die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, dass tatsächlich ein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + D + U = S + N$. Welche Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt man in diesem Fall mit diesem Empfänger im Vergleich zum ML-Empfänger aus Punkt a)?

e) Nehmen Sie $\mathrm{P}\{S = 0\} = 1/4$ an. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers sowie die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, dass tatsächlich ein Störer vorhanden ist. Welche Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt man in diesem Fall mit diesem Empfänger im Vergleich zum MAP-Empfänger aus Punkt b)?

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Die äquivalente Basisband-Impulsantwort eines Bandpasskanals sei durch

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\, e^{-\alpha(t-i\,T)}\, \mathrm{rect}\Big(t - i\,T, \frac{T}{2}\Big), \qquad \alpha > 0$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Impulsantwort $\rho_h[k]$ des äquivalenten zeitdiskreten Systems (dieses umfasst auch ein im Symboltakt abgetastetes signalangepasstes Filter).

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $S_h(z)$ des äquivalenten zeitdiskreten Systems und skizzieren Sie die Funktion $S_h(e^{j\theta})$.

c) Geben Sie die Nullstellen und Pole von $S_h(z)$ an und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm.

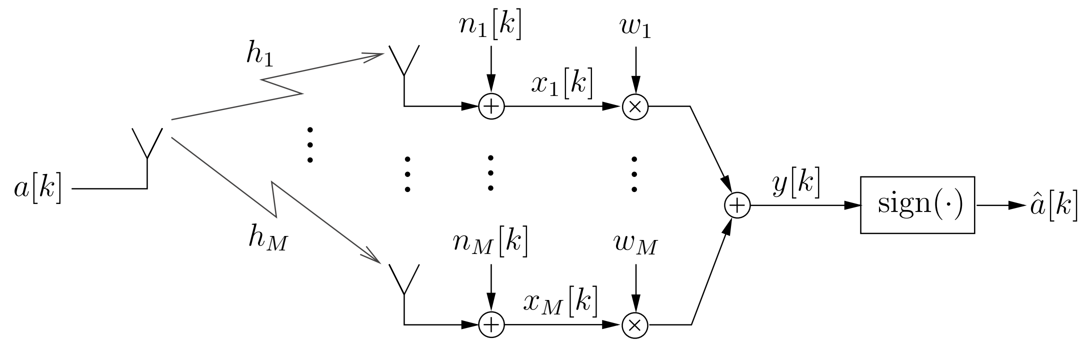
d) Berechnen Sie den linearen *zero forcing*-Entzerrer und geben Sie dessen Pole an.

e) Finden Sie eine minimalphasige Faktorisierung von $S_h(z)$.

f) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des äquivalenten zeitdiskreten Systems inklusive des *noise whitening*-Filters.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Betrachten Sie eine ISI-freie Übertragung von Symbolen $a[k] \in \{-1, 1\}$ (mit $\mathrm{P}\{a[k]{=}1\} = 1/2$) über einen Schwundkanal mit Hilfe von M Empfangsantennen (siehe Abb.).



Die Empfangswerte sind durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{h}\,a[k] + \boldsymbol{n}[k]\,, \qquad \boldsymbol{x}[k] = \begin{pmatrix} x_1[k] \\ \vdots \\ x_M[k] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}[k] = \begin{pmatrix} n_1[k] \\ \vdots \\ n_M[k] \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $h_1, \ldots, h_M$ die Kanalkoeffizienten. Das Rauschen $\boldsymbol{n}$ ist statistisch unabhängig von den Symbolen sowie normalverteilt mit $\mathrm{E}\{\boldsymbol{n}[k]\} = \boldsymbol{0}$ und $\mathrm{E}\{\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}^T[k]\} = \sigma^2\mathbf{I}$. Mit einem Vektor $\boldsymbol{w} = (w_1 \ldots w_M)^T$ werden die Empfangswerte $x_1[k], \ldots, x_M[k]$ zu *einer* Empfangsgröße $y[k] = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}[k]$ kombiniert. Die Symbolentscheidungen lauten $\hat{a}[k] = \mathrm{sign}(y[k])$.

a) Nehmen Sie $\boldsymbol{h}$ als bekannt an und berechnen Sie das SNR $\gamma = \mathrm{E}\{s^2[k]\}/\mathrm{E}\{z^2[k]\}$ (mit $s[k] = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{h}\,a[k]$ und $z[k] = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{n}[k]$) am Ausgang des Kombinierers.

b) Bestimmen Sie den optimalen Kombinationsvektor $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$, der das SNR maximiert, und geben Sie das maximale SNR an. Verwenden Sie dazu die Schwarzsche Ungleichung $|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$, wobei Gleichheit für $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$ gilt.

c) Nehmen Sie nun an, dass der Kanal zufällig ist. Die Kanalschwundkoeffzienten $\boldsymbol{h}$ seien statistisch unabhängig von $a[k]$ und $n_i[k]$ sowie normalverteilt mit $\mathrm{E}\{\boldsymbol{h}\} = \boldsymbol{0}$ und $\mathrm{E}\{\boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^T\} = \rho^2\mathbf{I}$. Im Folgenden soll der in b) berechnete optimale Kombinationsvektor $\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}$ verwendet werden. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz des SNRs $\gamma = \mathrm{E}\{s^2[k]\}/\mathrm{E}\{z^2[k]\}$. Benützen Sie dabei die für normalverteilte Zufallsvariablen gültige Beziehung $\mathrm{E}\{x^2y^2\} = \mathrm{E}\{x^2\}\mathrm{E}\{y^2\} + 2\big[\mathrm{E}\{xy\}\big]^2$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Im Folgenden soll ein orthogonales Multipuls-PAM-System mit M Subträgern, M Sendeimpulsen $g_m(t)$ und zufälligen Sendesymbolen $A_m[k]$ ($m \in \{1, \ldots, M\}$, $k \in \mathbb{Z}$) untersucht werden.

a) Leiten Sie die Autokorrelation des stationarisierten Sendesignals her. Über die Statistik der Symbole $A_m[k]$ wird zunächst keine Annahme gemacht.

b) Vereinfachen Sie die Ergebnisse aus a) für den Fall, dass die Symbole $A_m[k]$ mittelwertfrei und unkorreliert bezüglich m sind, jedoch bezüglich k gemäß $\mathrm{E}\{A_m[k]A_n^*[l]\} = R_A^{(m)}[k-l]\delta_{m,n}$ korreliert sind. Berechnen Sie auch das Leistungsdichtespektrum des stationarisierten Sendesignals.

c) Spezialisieren Sie die Ergebnisse aus b) für den Fall, dass alle Symbole $A_m[k]$ mittelwertfrei und unkorreliert mit Varianzen $\sigma_A^{(m)2}$ sind.

d) Nehmen Sie den Sendeimpuls $g_m(t) = G\cos\big((2m-1)\omega_0 t\big)\,\mathrm{sinc}\big(\pi\frac{t}{T_s}\big)$ für $m = 1, 2, \ldots M$ an, wobei $\omega_0 = 2\pi/T_s$. Zeichnen Sie das Leistungsdichtespektrum des stationarisierten Sendesignals für Symbole $A_m[k] \in \{-2, 2\}$, die mittelwertfrei, gleichverteilt und unkorreliert sind.

e) Berechnen Sie die Sendebandbreite und die spektrale Effizienz für den Sendeimpuls aus Punkt d).