Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 11. Jänner 2010

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Zeigen Sie, wie sich die Ausdrücke $\|x\|$, $\|y\|$, $\langle x, y\rangle$ und $\|x+y\|$ ändern, wenn beide Signale $x(t)$ und $y(t)$ folgendermaßen transformiert werden:

a) durch Zeitverschiebung um t_0,

b) durch Frequenzverschiebung um ω_0 (d.h. Multiplikation mit $e^{j\omega_0 t}$),

c) durch Addition eines konstanten Offsets $c \in \mathbb{C}$,

d) durch Multiplikation einer konstanten Skalierung $\alpha \in \mathbb{C}$,

e) durch Zeitskalierung, nämlich $x(t) \to \sqrt{|a|}\,x(at)$ und $y(t) \to \sqrt{|a|}\,y(at)$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Hinweis*: Verwenden Sie $a = |a| \cdot \operatorname{sign}(a)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Der empfangene Impuls in einem PAM-System ist

$$h(t) = e^{-at}\,\mathrm{u}(t) + e^{-a(t-T_S)}\,\mathrm{u}(t-T_S), \quad \text{wobei } a > 0.$$

T_S ist die Symbolrate. $\mathrm{u}(t)$ bezeichnet die Sprungfunktion. Das Rauschen $N(t)$ ist weiß mit spektraler Leistungsdichte $N_0/2$. Im Empfänger folgen nach der Transformation ins Basisband ein Empfangsfilter $f(t)$, ein Abtaster im Symboltakt, ein linearer ZF-Entzerrer und ein Entscheider.

a) Geben Sie jenes Empfangsfilter $f(t)$ an, das die Rauschverstärkung (*noise enhancement*) des ZF-Entzerrers minimiert. Benutzen Sie in der Folge dieses Empfangsfilter.

b) Berechnen Sie den äquivalenten zeitdiskreten Impuls $p[k]$ am Eingang des Entzerrers.

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des linearen ZF-Entzerrers.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Ein Übertragungssystem verwendet vier Signale aus einem zweidimensionalen Signalraum, die über einen AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte $N_0/2 = 10^{-6}$W/Hz übertragen werden. Die vier Signalvektoren sind

$$\mathbf{s}^{(1)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(3)} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(4)} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $c^2 = 16\mu$J. Die Sendewahrscheinlichkeiten betragen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$. Die verwendeten Basisfunktionen sind

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1.2}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2}; \frac{T}{8}\right) - \frac{1.6}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{3T}{2}; \frac{T}{8}\right), \\ \phi_2(t) &= -\frac{1.6}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{T}{2}; \frac{T}{8}\right) - \frac{1.2}{\sqrt{T}} \operatorname{rect}\left(t - \frac{3T}{2}; \frac{T}{8}\right). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Basis orthonormal ist.

b) Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}_{\mathrm{MAP}}\{\mathcal{E}|I = i\}$ des MAP-Empfängers für $i = 1, 2, 3, 4$.

c) Berechnen Sie den *union bound* der bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten für $i = 1, 2, 3, 4$.

d) Berechnen Sie die unbedingte Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}_{\mathrm{MAP}}\{\mathcal{E}\}$ des MAP-Empfängers sowie den *union bound* der unbedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Mittels Bandpass-PAM werden weiße Daten (Bitrate $R_b = 64\,\text{kbit/s}$) über einen bandbegrenzten AWGN-Kanal (spektrale Rauschleistungsdichte $N_0 = 9 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{W}}{\text{Hz}}$, Bandbreite $B_c = 20\,\text{kHz}$) übertragen. Das Spektrum des Sendeimpulses ist durch $G(j\omega) = \sqrt{R(j\omega)}$ gegeben, wobei $R(j\omega)$ das Spektrum eines *raised–cosine* Impulses mit $\alpha = 0.5$ ist. Zur Übertragung wird eine M_a-QAM Signalkonstellation verwendet, wobei Symbole mit negativem Realteil doppelt so wahrscheinlich gesendet werden wie Symbole mit positivem Realteil.

a) Berechnen Sie die mindestens erforderliche Anzahl M_a der Symbole im Symbolalphabet. (Hinweis: Mögliche Werte für M_a sind $4n^2$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$.) Skizzieren Sie die entsprechende Signalkonstellation.

b) Entwerfen Sie das Empfangsfilter für ISI-freie Übertragung und skizzieren Sie das Blockschaltbild des entsprechenden ML-Empfängers.

c) Berechnen Sie den minimalen Symbolabstand d_a für Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} = 1.6 \cdot 10^{-6}$. Verwenden Sie dazu die Näherung $\mathrm{P}\{\mathcal{E}_s\} \approx \overline{\mathcal{N}}\,\mathcal{Q}\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\sigma_Z}\right)$.

d) Wie muß man diese Konstellation verschieben, um die Sendeleistung $P_{\bar{S}}$ zu minimieren? Skizzieren Sie die verschobene Signalkonstellation. Um wieviel wird die Sendeleistung durch diese Verschiebung verringert?