Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 8. Oktober 2008

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Betrachten Sie einen Impuls $p(t)$ mit der Fourier-Transformierten

$$P(j\omega) = \begin{cases} T_s \left(1 - \frac{|\omega|}{\alpha \cdot 2\pi/T_s}\right), & |\omega| < \alpha \frac{2\pi}{T_s} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$.

a1) Skizzieren Sie $P(j\omega)$ und die Fourier-Transformierte des mit der Periode T_s abgetasteten Impulses für $\alpha = 0.75$.

a2) Für welche Werte von α handelt es sich um einen Nyquist-Impuls?

b) Betrachten Sie nun ein System mit Orthogonal Multipulse Modulation, wobei die aus $p(t)$ gebildeten Chang-Impulse

$$g_m(t) = c(t) \cos\left(\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{t}{T_s}\right), \quad m = 1, 2, \ldots, M_a$$

mit $C(j\omega) = \sqrt{P(j\omega)}$ verwendet werden.

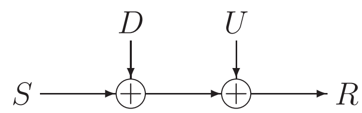
b1) Geben Sie die Fourier-Transformierte der Chang-Impulse in Abhängigkeit von α an.

b2) Für welche Werte von α erfüllen die Chang-Impulse das Generalized Nyquist Criterion?

b3) Nehmen Sie $M_a = 4$ an. Die Sendesymbole sind gleichverteilt und statistisch unabhängig. Berechnen Sie die mittlere Sendeleistung.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Die Übertragung eines Symbols S aus dem Alphabet $\{0, A\}$ wird durch einen Störsender und durch Rauschen beeinträchtigt:



Der Störer sendet Symbole D gleichwahrscheinlich aus dem Alphabet $\{0, A\}$. Das additive Rauschen U hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} - \dfrac{|u|}{A^2} & \text{für } |u| \leq A\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Symbol S, Störer D und Rauschen U sind statistisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers und die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass kein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + U$.

b) Es wird wieder angenommen, dass kein Störer vorhanden ist. Berechnen Sie die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers und die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für $\mathrm{P}\{S = 0\} = 2/3$.

c) Fassen Sie nun Störsender und Rauschen zu einer Gesamtstörung $N = D + U$ zusammen. Berechnen und skizzieren Sie die bedingten WDF $f_{N|D}(n|d = 0)$ und $f_{N|D}(n|d = A)$ sowie die WDF $f_N(n)$.

d) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers sowie die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, dass tatsächlich ein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + D + U = S + N$. Welche Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt man in diesem Fall mit diesem Empfänger im Vergleich zum ML-Empfänger aus Punkt a)?

e) Nehmen Sie $\mathrm{P}\{S = 0\} = 2/3$ an. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des MAP-Empfängers sowie die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, dass tatsächlich ein Störer vorhanden ist. Welche Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt man in diesem Fall mit diesem Empfänger im Vergleich zum MAP-Empfänger aus Punkt b)?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Eine Folge statistisch unabhängiger und gleichwahrscheinlicher binärer Symbole $A[k] \in \{0,1\}$ wird über einen zeitdiskreten Kanal übertragen. Der Kanal ist dispersiv und *nichtlinear* mit der Eingangs-/Ausgangsbeziehung

$$b[k] = 0.8\,a[k] - 0.2\,a[k-2] + 1.1\,(a[k] \oplus a[k-1]),$$

wobei $\oplus$ eine *Addition modulo 2* bezeichnet. Die empfangene Folge ist durch $y[k] = b[k] + n[k]$, $k = 1, \ldots, K$ gegeben, wobei das Rauschen $n[k]$ Laplace-verteilt ist, d.h.

$$f_N(n) = \frac{1}{2}\, e^{-|n|}\,.$$

Die Rauschwerte $n[k]$ sind statistisch unabhängig.

a) Modellieren Sie das System als (nichtlinearen) Schieberegisterprozess. Zeichnen sie das Zustandsübergangsdiagramm und eine Stufe des Trellisdiagramms.

b) **b1)** Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des zugehörigen ML-Folgendetektors.

b2) Zeigen Sie, dass sich dieser ML-Folgendetektor mit dem Viterbi-Algorithmus und einer geeigneten Zweigmetrik implementieren lässt.

b3) Bestimmen Sie für die Empfangsfolge $y[0] = 1.1$, $y[1] = 0.5$ und $y[2] = -0.7$ die mit dem ML-Empfänger detektierte Symbolfolge. Nehmen Sie dabei $y[k] = 0$ für $k < 0$ an.

c) Auf welche Symbolfolge entscheidet ein für Gaußsches Rauschen entworfener ML-Folgendetektor, wenn dieselbe Folge wie unter b3) empfangen wird?

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Betrachten Sie ein Bandpass-PAM-System mit Symbolperiode T_s, Sendeimpuls $g(t)$ (Energie $E_g = 1$, $g(t) = 0$ für $t \notin [-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}]$) und Sendesymbolen $A[k]$. Der Empfangsimpuls im äquivalenten Basisband ist $h(t) = g(t) + \alpha\, g(t - T_s)$ ($|\alpha| < 1$). Das Rauschleistungdichtespektrum des additiven Rauschens ist durch $S_N(j\omega) = N_0/2$ gegeben.

a) Die erste Stufe des Empängers ist ein abgetastetes signalangepasstes Filter. Der Kanal ist dem Empfänger bekannt. Bestimmen Sie die Impulsantwort, die Übertragungsfunktion und das Rauschleistungsdichtespektrum des äquivalenten zeitdiskreten Systems.

b) Die zweite Stufe des Empfängers bildet ein noise-whitening Filter, welches über eine minimalphasige spektrale Faktorisierung berechnet wird. Bestimmen Sie Impulsantwort, Übertragungsfunktion und Rauschleistungsdichtespektrum des äquivalenten zeitdiskreten Systems für die Übertragungsstrecke bis zum Ausgang des noise-whitening Filters. Zeigen Sie, dass am Ausgang des whitening Filters keine Vorläufer-Intersymbolinterferenz auftritt.

c) Betrachten Sie nun als dritte Stufe des Empfängers einen Zero-Forcing Entzerrer. Geben Sie die Impulsantwort und Übertragungsfunktion des Entzerrers an und vergleichen Sie die Rauschvarianzen am Eingang und Ausgang dieses Entzerrers.