# Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 15. März 2010

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

**Bitte beachten Sie:**

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

**Aufgabe 1 (20 Punkte)**

Betrachten Sie ein Bandpass PAM-System, in dem das Sendefilter $g(t)$ und das Empfangsfilter $f(t)$ ideale Tiefpassfilter mit der Bandbreite $B_g = B_f$ sind. Der Kanal hat folgende Übertragungsfunktion:

$$B_{\mathrm{LP}}(j\omega) = \alpha \,\mathrm{rect}\left(\omega; \frac{2\pi}{T_s}\right).$$

Das Rauschen ist weiß mit spektraler Leistungsdichte $N_0/2$.

**a)** Nehmen Sie $B_g = B_f = 1/T_s$ an.

**a1)** Berechnen und skizzieren Sie die Übertragungsfunktion $P(e^{j\theta})$ und Impulsantwort $p[k]$ des äquivalenten zeitdiskreten Basisband-Systems.

**a2)** Berechnen und skizzieren Sie die spektrale Leistungsdichte $S_Z(e^{j\theta})$ und Autokorrelationsfunktion $R_Z[k]$ des äquivalenten zeitdiskreten Basisband-Rauschens $Z[k]$.

**b)** Wiederholen Sie Teil a) unter der Annahme $B_g = B_f = 1/(2T_s)$.

**Aufgabe 2 (20 Punkte)**

Der empfangene Impuls in einem PAM-System ist

$$h(t) = e^{-at}\,\mathrm{u}(t) + e^{-a(t-T_S/2)}\,\mathrm{u}(t - T_S/2), \quad \text{wobei } a > 0.$$

$T_S$ ist die Symbolrate. $\mathrm{u}(t)$ bezeichnet die Sprungfunktion. Das Rauschen $N(t)$ ist weiß mit spektraler Leistungsdichte $N_0/2$. Im Empfänger folgen nach der Transformation in das Basisband ein Empfangsfilter $f(t)$, ein Abtaster im Symboltakt, ein linearer ZF-Entzerrer und ein Entscheider.

**a)** Geben Sie jenes Empfangsfilter $f(t)$ an, das die Rauschverstärkung (*noise enhancement*) des ZF-Entzerrers minimiert. Benutzen Sie in der Folge dieses Empfangsfilter.

**b)** Geben Sie eine Funktion $\phi(t)$ an, sodass gilt: $h(t) = \phi(t) + \phi(t - T_S/2)$. Verwenden Sie diesen Zusammenhang für die folgenden Berechnungen.

**c)** Berechnen Sie den äquivalenten zeitdiskreten Impuls $p[k]$ am Eingang des Entzerrers.

**d)** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des linearen ZF-Entzerrers.

**Aufgabe 3 (20 Punkte)**

Weiße Symbole $a[k]$ aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$ werden über einen zeitdiskreten AWGN-Kanal mit Impulsantwort $h[k] = \delta[k] - \frac{3}{4}\delta[k-1]$ und Rauschvarianz $\sigma_z^2$ übertragen. Am Ausgang des Kanals wird die Folge $y[k] = (h * a)[k] + z[k]$ empfangen.

**a)** Betrachten Sie zunächst eine symbolweise Entscheidung von $y[k]$.

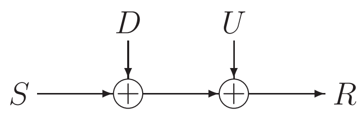
- **a1)** Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k] \,|\, a[k] = \alpha, a[k-1] = \beta\}$ für $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.
- **a2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$.

**b)** Betrachten Sie nun einen Empfänger, bei dem die Folge $y[k]$ zunächst mit einem Zero-Forcing-Filter entzerrt und danach symbolweise detektiert wird.

- **b1)** Geben Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des Zero-Forcing-Entzerrers an und berechnen Sie die Varianz des gefilterten Rauschens nach dem Entzerrer.
- **b2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$ des Zero-Forcing-Detektors und vergleichen Sie diese mit der in Punkt a2) berechneten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit der symbolweisen Detektion.

**Aufgabe 4 (20 Punkte)**

Die Übertragung eines Symbols $S$ aus dem Alphabet $\{0, A\}$ wird durch einen Störsender und durch Rauschen beeinträchtigt:




Der Störer sendet Symbole $D$ gleichwahrscheinlich aus dem Alphabet $\{0, A\}$. Das additive Rauschen $U$ hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} - \dfrac{|u|}{A^2} & \text{für } |u| \leq A\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Symbol $S$, Störer $D$ und Rauschen $U$ sind statistisch unabhängig.

**a)** Berechnen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers und die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass kein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + U$.

**b)** Fassen Sie nun Störsender und Rauschen zu einer Gesamtstörung $N = D + U$ zusammen. Berechnen und skizzieren Sie die bedingten WDF $f_{N|D}(n|d = 0)$ und $f_{N|D}(n|d = A)$ sowie die WDF $f_N(n)$.

**c)** Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Empfängers sowie die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, dass tatsächlich ein Störer vorhanden ist, d.h. $R = S + D + U = S + N$. Welche Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt man in diesem Fall mit diesem Empfänger im Vergleich zum ML-Empfänger aus Punkt a)?