Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 19. Mai 2008

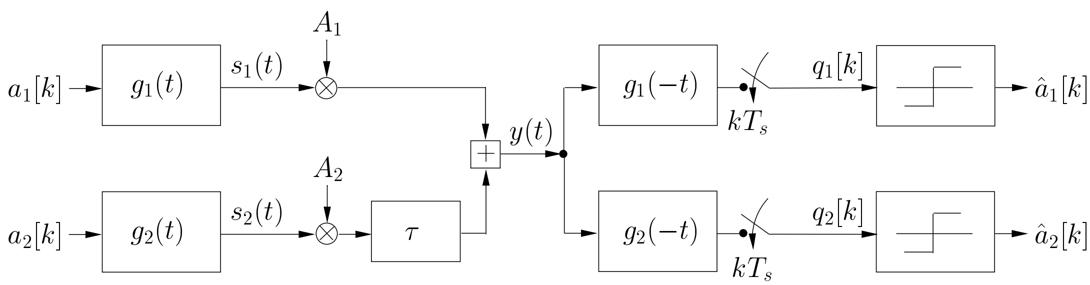
Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Zwei Benutzer übertragen mittels Basisband-PAM weiße Daten zu einer Basisstation. Das entsprechende *rauschfreie* Übertragungssystem sei folgendermaßen gegeben:



Aufgrund von Laufzeitunterschieden ist das Empfangssignal von Benutzer 2 gegenüber dem Empfangssignal von Benutzer 1 um $\tau \in [0, T_s]$ verzögert. Durch den Kanal werden die Sendesignale von Benutzer 1 und 2 zusätzlich mit positiven Amplitudenfaktoren A_1 und A_2 gewichtet. Die Sendeimpulse von Benutzer 1 und 2 sind durch

$$g_1(t) = \operatorname{rect}\left(t - \frac{T_s}{4}; \frac{T_s}{4}\right) - \operatorname{rect}\left(t - \frac{3T_s}{4}; \frac{T_s}{4}\right), \qquad g_2(t) = \operatorname{rect}\left(t - \frac{T_s}{2}; \frac{T_s}{2}\right)$$

gegeben. Beide Benutzer verwenden BPSK-Modulation ($a \in \{-1, +1\}$), wobei angenommen werden kann, daß die Symbole gleichwahrscheinlich gesendet werden. Im folgenden wird nur der *rauschfreie* Fall untersucht.

a) Schreiben Sie das Empfangssignal $y(t)$ an.

b) Berechnen Sie $q_1[k]$ (die Folge am Entscheidereingang für Benutzer 1) als Funktion der Sendesymbole von Benutzer 1 und 2, der Verzögerung τ, der Amplituden A_1 und A_2 und der Symboldauer T_s. Interpretieren Sie das Ergebnis. Was passiert für $\tau = 0$ und $\tau = T_s$?

c) Berechnen Sie den kleinsten Wert von A_1/A_2 derart, dass $q_1[k]$ für alle Werte von τ fehlerfrei entschieden wird.

d) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in der Detektion von Benutzer 1 für den Fall, dass τ im Intervall $[0, T_s]$ gleichverteilt ist (Parameter: $T_s = 1$, $A_1/A_2 = 0.5$).

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Eine Symbolfolge der Länge K, dargestellt als Vektor $\mathbf{a} = (a_1\, a_2 \ldots a_K)^T$, wird über einen ISI-freien Kanal mit mittelwertfreiem, additivem, weißem, Gaußschem Rauschen $\mathbf{n}$ übertragen:

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{n}.$$

Das Rauschen ist statistisch unabhängig von den Symbolen. Seine Varianz wird als Zufallsvariable modelliert und beträgt entweder σ_0^2 ("rauscharmer Fall") oder $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ ("stark verrauschter Fall").

Zunächst wird eine dem Empfänger bekannte Symbolfolge (Präambel) $\mathbf{a}_P$ der Länge K_P übertragen. Aufgrund dieser Präambel entscheidet der Empfänger zwischen σ_0^2 und σ_1^2, wobei er einen ML-Entscheider zur "Detektion" von σ^2 benützt. Die detektierte Rauschvarianz wird in der Folge bei der Detektion der Datensymbole verwendet, was aber in dieser Aufgabe nicht betrachtet werden soll.

a) Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Empfangssignals (Likelihood-Funktion) $f(\mathbf{q}|\mathbf{a}_P, \sigma^2)$ an.

b) Formulieren Sie den ML-Entscheider der Rauschvarianz bei gegebenem Empfangsvektor $\mathbf{q}$ und gegebenem Symbolvektor $\mathbf{a} = \mathbf{a}_P$: Wie lautet die Entscheidungsregel für $\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}}(\mathbf{q}, \mathbf{a}_P) = \sigma_0^2$ bzw. $\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}}(\mathbf{q}, \mathbf{a}_P) = \sigma_1^2$?

c) Vereinfachen Sie die ML-Bedingung für $K_P = 1$ und $a_P = 1$. Skizzieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(q|a = 1, \sigma^2)$ für die beiden Fälle $\sigma^2 = \sigma_0^2$ und $\sigma^2 = \sigma_1^2$ sowie die ML-Entscheidungsgrenzen.

d) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten eines Entscheidungsfehlers $\mathrm{P}\{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \sigma_0^2 | \sigma^2 = \sigma_1^2\}$ und $\mathrm{P}\{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \sigma_1^2 | \sigma^2 = \sigma_0^2\}$. (Es gelten weiterhin $K_P = 1$ und $a_P = 1$.)

e) Es sei $\mathrm{P}\{\sigma^2 = \sigma_0^2\} = 2/3$. Berechnen Sie die unbedingte Wahrscheinlichkeit eines Entscheidungsfehlers $\mathrm{P}\{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} \neq \sigma^2\}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Im Sender eines Übertragungssystems werden gleichwahrscheinliche QPSK-Symbole $A[k] \in \{1, -1, j, -j\}$ auf Sendesymbole $S[k] = A[k]A[k-1]$ abgebildet (gedächtnisbehaftete Modulation). Die Empfangsgröße ist durch $Q[k] = S[k]+Z[k]$ gegeben, wobei $Z[k]$ komplexwertiges, weißes Gaußsches Rauschen ist. Die empfangene Folge sei $q[0] = 1.6 - j1.9$, $q[1] = 0.6 + j$, wobei am Empfänger $A[-1] = 1$ bekannt ist.

a) Zeichnen und beschriften Sie das Zustandsübergangsdiagramm und eine Stufe des Trellisdiagramms für das Signalerzeugungsmodell $S[k] = A[k]A[k-1]$.

b) Bestimmen Sie die mit dem Viterbi-Algorithmus detektierte Symbolfolge $\hat{a}[k]$. Kennzeichnen Sie in Ihrem Diagramm den optimalen Pfad und geben Sie die minimale Pfadmetrik $d_{\min}$ an.

c) Entwerfen Sie einen einfachen Alternativempfänger, welcher symbolweise ML-Entscheidungen $\hat{s}[k]$ benutzt und daraus und aus dem Signalerzeugungsmodell rekursiv die Symbole $\hat{a}[k]$ berechnet. Auf welche Symbolfolge entscheidet dieser Empfänger?

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Weiße Symbole $a[k]$ aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$ werden über einen zeitdiskreten AWGN-Kanal mit Impulsantwort $h[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1]$ und Rauschvarianz σ_z^2 übertragen. Am Ausgang des Kanals wird die Folge $y[k] = (h * a)[k] + z[k]$ empfangen.

a) Betrachten Sie zunächst eine symbolweise Entscheidung von $y[k]$.

- **a1)** Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k] \,|\, a[k] = \alpha, a[k-1] = \beta\}$ für $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.
- **a2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$.

b) Betrachten Sie nun einen Empfänger, bei dem die Folge $y[k]$ zunächst mit einem Zero-Forcing-Filter entzerrt und danach symbolweise detektiert wird.

- **b1)** Geben Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des Zero-Forcing-Entzerrers an und berechnen Sie die Varianz des gefilterten Rauschens nach dem Entzerrer.
- **b2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$ des Zero-Forcing-Detektors und vergleichen Sie diese mit der in Punkt a2) berechneten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit der symbolweisen Detektion.