Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 10. März 2008

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Zur Übertragung binärer Symbole $a[k] \in \{-1, 1\}$, $k = 1, \ldots, K$ wird eine Variante von FSK mit Sendeimpulsen

$$g_1(t) = A \sin(\omega_0 t)\ g(t), \qquad g_2(t) = A \sin((\omega_0 + \Delta\omega)t)\ g(t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}, \qquad \Delta\omega \geq 0$$

verwendet. Die Zuordnung der Symbole zu den Sendeimpulsen ist durch $-1 \to g_1(t)$, $1 \to g_2(t)$ gegeben. Das Signal $g(t)$ ist ein Rechteckimpuls mit Höhe 1 im Intervall $[0, T_s]$.

a) Berechnen und skizzieren Sie $\langle g_1, g_2 \rangle$ als Funktion von $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi$. Geben Sie den minimalen Frequenzabstand $\Delta f_{\min}$ für orthogonale Sendeimpulse an und berechnen Sie eine entsprechende orthonormale Basis $\phi_{m,k}(t)$, $m = 1, 2$ des Sendesignalraums.

b) Skizzieren Sie den Phasenverlauf $\psi(t) \in [0, 2\pi]$ des Sendesignals für die Symbolfolge $1, 1, -1, 1$ und $\Delta f = \Delta f_{\min}$. Der Phasenverlauf $\psi(t)$ ist hier durch

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \psi(t))$$

definiert. Welcher Frequenzabstand Δf wäre mindestens erforderlich, um einen stetigen Phasenverlauf zu erhalten?

c) Es soll nun *continuous phase*-FSK untersucht werden. Hier ist der Phasenverlauf in Abhängigkeit von den Sendesymbolen $a[k]$ durch

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2T_s} \int_{-\infty}^{t} \sum_{k=1}^{K} a[k] g(\tau - kT_s) d\tau$$

gegeben. Berechnen Sie $\psi(t)$ für $lT_s \leq t \leq (l+1)T_s$, $l = 1 \ldots K$. Finden Sie eine geeignete Darstellung von $s(t)$, um dieses Verfahren als FSK-Modulation interpretieren zu können. Welcher Frequenzabstand ergibt sich für dieses Verfahren? Skizzieren Sie $\psi(t)$ für die Symbolfolge aus Punkt b) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Die Übertragungsfunktion $S_h(z)$ des äquivalenten zeitdiskreten Systems eines Bandpasskanals mit AWGN-Rauschen sei durch

$$S_h(z) = \frac{2z^2 + 5z + 2}{9z}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Funktion $S_h(e^{j\theta})$. Geben Sie die Nullstellen und Pole von $S_h(z)$ an und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm.

b) Finden Sie eine minimalphasige Faktorisierung von $S_h(z)$.

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des äquivalenten zeitdiskreten Systems inklusive des *noise whitening*-Filters.

c) Statistisch unabhängige, gleichwahrscheinliche Symbole $a[k] \in \{-1, 1, -j, j\}$ werden über den Kanal übertragen. Am Ausgang des *noise whitening*-Filters wird der Viterbi-Algorithmus implementiert. Zeichnen Sie das Zustandsübergangsdiagramm und eine Stufe des Trellisdiagramms.

d) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des ML-Folgendetektors.

e) Die empfangene Folge sei $y[0] = -2$, $y[1] = -1.5$, $y[2] = -4$. Bestimmen Sie die mit dem Viterbi-Algorithmus detektierte Symbolfolge $\hat{a}[k]$. Kennzeichnen Sie in Ihrem Diagramm den optimalen Pfad und geben Sie die minimale Pfadmetrik $d_{\min}$ an.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Es soll ein Bandpass-PAM-System mit Symbolalphabet $\mathcal{A} = \{-1-j, -1+j, 1+j, 1-j\}$ untersucht werden, wobei die Symbole $A[k]$ als weiß und gleichwahrscheinlich angenommen werden.

a) Berechnen Sie die Symbolleistung P_A.

b) Zur Übertragung wird die Symbolfolge $A[k]$ in eine Folge $B[k] = A[k] + \alpha A[k-1]$ transformiert. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_B(e^{j\theta})$ der transformierten Symbole $B[k]$.

c) Das Sendesignal im äquivalenten Basisband ist $S_{\text{LP}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B[k]g(t-kT_s)$. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{\bar{S}_{\text{LP}}}(j\omega)$ des stationarisierten Sendesignales $\bar{S}_{\text{LP}}(t)$.

d) Bei der Frequenz $\omega = \frac{\pi}{T_s}$ soll das Spektrum $S_{\bar{S}_{\text{LP}}}(j\omega)$ eine Nullstelle haben. Wie groß muß α gewählt werden, damit diese Bedingung erfüllt ist?

e) Nehmen Sie an, dass der Sendeimpuls $g(t)$ ein sinc-Impuls ist: $g(t) = \text{sinc}(\frac{\pi t}{T_s})$. Skizzieren Sie für diesen Fall das Leistungsdichtespektrum des stationarisierten Sendesignales $S_{\bar{S}_{\text{LP}}}(j\omega)$ für den Wert α aus Punkt d).

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Eine binäre Zufallsvariable $S \in \{-1, 1\}$ (mit $p_S(-1) = 1/3$) wird durch additives Rauschen N gestört wird, welches statistisch unabhängig von S ist und gemäß der Cauchy-Verteilung

$$f_N(n) = \frac{\alpha/\pi}{n^2 + \alpha^2} \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

verteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P\{N > n_1\}$ und $P\{N < n_2\}$. (Hinweis: $\frac{d}{dx}\text{arctan}x = \frac{1}{1+x^2}$)

b) Berechnen Sie jenen Wert für den den Parameter α, für den $P\{|N| > 1/2\} = 0.2$ gilt. Dieser Wert ist in der Folge zu verwenden.

c) Geben Sie die Likelihood-Funktion an.

d) Berechnen und skizzieren Sie die ML-Entscheidungsregel und die MAP-Entscheidungsregel.

e) Berechnen Sie die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit des ML-Detektors und die des MAP-Detektors bei

- $S = -1$,
- $S = 1$.

f) Berechnen Sie die unbedingte Fehlerwahrscheinlichkeit des ML-Detektors und die des MAP-Detektors.