Modulations- und Detektionsverfahren

Schriftliche Prüfung am 16. März 2009

Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen das Vorlesungsskriptum, einen Taschenrechner sowie eine *mathematische* Formelsammlung ihrer Wahl verwenden.
- Vorlesungsmitschriften, Übungsunterlagen und vorbereitete Beispiele dürfen Sie nicht verwenden.
- Lesbare Schrift und übersichtliche Ausarbeitung sind unbedingt erforderlich!
- Stellen Sie den Rechengang ausführlich dar. Falls Sie Ergebnisse aus dem Vorlesungsskriptum verwenden, müssen diese eindeutig referenziert werden.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein Sender verwendet zur Übertragung eines Symbols $a \in \{1, -1\}$ folgende Sendesignale:

$$s^{(i)}(t) = \cos\left(\frac{\pi(100 + a^{(i)})}{T} t\right) \operatorname{rect}\left(t; \frac{T}{2}\right), \qquad i = 1, 2,$$

wobei $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$. Das gewählte Signal wird über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte $N_0/2$ übertragen:

$$y(t) = s(t) + n(t).$$

Der ML-Empfänger bildet zunächst die Inprodukte des Empfangssignals mit den beiden Sendesignalen,

$$c^{(i)} = \langle y, s^{(i)} \rangle, \quad i = 1, 2,$$

und wählt das größere aus:

$$\hat{i}_{\mathrm{ML}} = \arg\max_i c^{(i)}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Sendesignale orthogonal sind.
Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

b) Berechnen Sie $c^{(i)}$ in Abhängigkeit von a und $n(t)$.

c) Die Inprodukte bestehen aus einem Signalanteil und einem Rauschanteil:

$$c^{(i)} = c_A^{(i)} + c_N^{(i)}.$$

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung von $c_N^{(i)}$ an.

d) Nehmen Sie an, dass $a = 1$ gesendet wird. Berechnen Sie für diesen Fall $c_A^{(1)}$ und $c_A^{(2)}$ und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen von $c^{(1)}$ und $c^{(2)}$ an.

e) Nehmen Sie nun an, dass die Übertragung durch den Störsender $w(t)$ gestört wird:

$$y(t) = s(t) + w(t) + n(t) \quad \text{mit} \quad w(t) = \cos\left(\frac{100\pi}{T} t\right).$$

Es gilt weiterhin $a = 1$. Berechnen Sie für diesen Fall $c_A^{(1)}$ und $c_A^{(2)}$ und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen von $c^{(1)}$ und $c^{(2)}$ an.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Weiße Symbole $a[k]$ aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{-A, A\}$ werden über einen zeitdiskreten AWGN-Kanal mit Impulsantwort $h[k] = \delta[k] - \frac{1}{4}\delta[k-1]$ und Rauschvarianz σ_z^2 übertragen. Am Ausgang des Kanals wird die Folge $y[k] = (h * a)[k] + z[k]$ empfangen.

a) Betrachten Sie zunächst eine symbolweise Entscheidung von $y[k]$.

- **a1)** Berechnen Sie die bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k] \,|\, a[k] = \alpha, a[k-1] = \beta\}$ für $\alpha, \beta \in \{-A, A\}$.
- **a2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$.

b) Betrachten Sie nun einen Empfänger, bei dem die Folge $y[k]$ zunächst mit einem Zero-Forcing-Filter entzerrt und danach symbolweise detektiert wird.

- **b1)** Geben Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des Zero-Forcing-Entzerrers an und berechnen Sie die Varianz des gefilterten Rauschens nach dem Entzerrer.
- **b2)** Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\hat{a}[k] \neq a[k]\}$ des Zero-Forcing-Detektors und vergleichen Sie diese mit der in Punkt a2) berechneten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit der symbolweisen Detektion.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Eine Folge statistisch unabhängiger und gleichwahrscheinlicher binärer Symbole $A[k] \in \{-1, 1\}$ wird über einen zeitdiskreten Kanal übertragen. Der Kanal ist dispersiv und *nichtlinear* mit der Eingangs-/Ausgangsbeziehung

$$b[k] = 0.2\, a[k] + 0.6\, a[k-2] - 0.4\, |a[k] - a[k-1]|\,.$$

Die empfangene Folge ist durch $y[k] = b[k] + n[k]$, $k = 1, \ldots, K$ gegeben, wobei das Rauschen $n[k]$ Laplace-verteilt ist, d.h.

$$f_N(n) = \frac{1}{2}\, e^{-|n|}\,.$$

Die Rauschwerte $n[k]$ sind statistisch unabhängig.

a) Modellieren Sie das System als (nichtlinearen) Schieberegisterprozess. Zeichnen sie das Zustandsübergangsdiagramm und eine Stufe des Trellisdiagramms.

b) **b1)** Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des zugehörigen ML-Folgendetektors.

b2) Zeigen Sie, dass sich dieser ML-Folgendetektor mit dem Viterbi-Algorithmus und einer geeigneten Zweigmetrik implementieren lässt.

b3) Bestimmen Sie für die Empfangsfolge $y[0] = -0.7$, $y[1] = 1.3$ und $y[2] = 0.2$ die mit dem ML-Empfänger detektierte Symbolfolge. Nehmen Sie dabei $a[k] = -1$ für $k < 0$ an.

c) Auf welche Symbolfolge entscheidet ein für Gaußsches Rauschen entworfener ML-Folgendetektor, wenn dieselbe Folge wie unter b3) empfangen wird?

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es soll ein Bandpass-PAM-System mit Symbolalphabet $\mathcal{A} = \{-1, 1, -1+2j, 1+2j\}$ untersucht werden, wobei die Symbole als weiß und gleichverteilt angenommen werden.

a) Berechnen Sie die Symbolleistung P_A. Um wieviel muß das Symbolalphabet verschoben werden, um die Symbolleistung zu minimieren?

Im Folgenden wird das verschobene Symbolalphabet verwendet.

b) Zur Übertragung wird die Symbolfolge $a[k]$ in eine Folge $b[k] = a[k] + \alpha a[k-1]$ transformiert. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_B(e^{j\theta})$ der transformierten Symbole $B[k]$.

c) Das Sendesignal im äquivalenten Basisband ist $s_{\mathrm{LP}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k] g(t - kT_s)$. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{\bar{S}_{\mathrm{LP}}}(j\omega)$ des stationarisierten Sendesignals $\bar{S}_{\mathrm{LP}}(t)$.

d) Bei der Frequenz $\omega = \frac{\pi}{T_s}$ soll das Spektrum $S_{\bar{S}_{\mathrm{LP}}}(j\omega)$ eine Nullstelle haben. Wie groß muß α gewählt werden, damit diese Bedingung erfüllt ist ?

e) Nehmen Sie an, daß der Sendeimpuls $g(t)$ ein sinc-Impuls ist: $g(t) = \mathrm{sinc}(\frac{\pi t}{T_s})$. Skizzieren Sie für diesen Fall das Leistungsdichtespektrum des stationarisierten Sendesignals $S_{\bar{S}_{\mathrm{LP}}}(j\omega)$ für den Wert α aus Punkt d).