Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Sie legen für n Jahre ihr Ausgangsvermögen V_0 zum variablen Zinssatz $100\,x_k\,\%$ ($x_k \in [0,1]$) für $k = 1 \ldots n$ an.

a) [L] Geben Sie eine Formel für Ihr Vermögen V_n nach n Jahren an. Wie groß ist ein konstanter, durchschnittlicher Zinssatz x, der nach n Jahren dasselbe Vermögen V_n ergibt?

b) [L] Untersuchen Sie, ob Ihr Vermögen V_n bei variabler Verzinsung mit Zinssatz $x_k = \frac{1}{k^2}$ beliebig groß wird für $n \to \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\ln(1+x) \leq x \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

und überlegen sie weiter (Rechnen mit Logarithmen!).

---

a) Variabler Zinssatz x_k $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+x_1)V_0 \\ V_2 &= (1+x_2)V_1 = (1+x_1)(1+x_2)V_0 \end{aligned}$$

usw.

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \cdot V_0$$

Der durchschnittliche Zinssatz x ergibt sich aus

$$(1+x) = \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

das sogenannte geometrische Mittel der $(1+x_k)$.

---

b) Für $x \geq 0$ gilt $1 + x \leq e^x \quad \Rightarrow$

$$\ln(1+x) \leq x \quad \checkmark$$

da ln monoton wachsend. [1]

$\longrightarrow$

[1] Die Ungleichung $\ln(1+x) \leq x$ ist sehr 'scharf' für kleine $|x|$ Sie gilt auch allgemeiner für alle $x > -1$. (Beweis mittels Differentialrechnung.)

$\Rightarrow$ Mit $x_k = \frac{1}{k^2}$, also

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{k^2}\right) \cdot V_0$$

gilt

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \tfrac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow$

$$V_n \leq e^{\pi^2/6} \cdot V_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(mit $e^{\pi^2/6} \approx \underline{5.18}$).

Bei dieser lausigen Zinsentwicklung bleibt Ihr Vermögen V_n beschränkt für $n \to \infty$. 😢

Anmerkung: Der exakte Wert von $V_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$ ist $\approx \underline{3.77} \cdot V_0$ (was wir hier nicht zu beweisen versuchen).

$\square$

a) [L] Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 4 zu den Datensätzen $\{(x_j, y_j),\ j = 0\ldots 4\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,3),\ (2,6),\ (3,9),\ (4,12)\,\}$

(ii) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,3),\ (3,8),\ (4,15)\,\}$

(iii) $\{\,(0,-1),\ (1,2),\ (2,-3),\ (3,4),\ (4,-5)\,\}$

(iv) $\{\,(-2,0),\ (-1,\ln(2)),\ (0,\ln(3)),\ (1,\ln(4)),\ (2,\ln(5))\,\}$

Hinweis: Zuerst überlegen, dann rechnen.

b) [L] Geben Sie für die Nullstellen von $p(x)$ aus **a)** (iii) ein Einschließungsintervall an.

c) [L] Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)** (iv) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [-2.95, 5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion $\ln(x+3)$. Was beobachten Sie?

---

a) Zu $n+1$ verschiedenen Datenpunkten (x_j, y_j):

Das Interpolationspolynom vom Grad $\le n$ ist immer eindeutig.

(i) $p(x) = 3\,x$

(ii) $p(x) = x^2 - 1$

(iii) Berechnung von $p(x)$: Entweder mittels Lagrange-Darstellung, oder mit Ansatz

$$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

und Lösung des linearen Gleichungssystems

$$a_0 + a_1\,x_j + a_2\,x_j^2 + a_3\,x_j^3 + a_4\,x_j^4 = y_j, \quad j = 0\ldots 4$$

nach den Unbekannten $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \quad \rightsquigarrow$

$$a_0 = -1, \quad a_1 = \frac{77}{3}, \quad a_2 = -36, \quad a_3 = \frac{46}{3}, \quad a_4 = -2$$

$$\rightsquigarrow \quad p(x) = -1 + \tfrac{77}{3}\,x - 36\,x^2 + \tfrac{46}{3}\,x^3 - 2\,x^4$$

$\longrightarrow$

(iv) Rechnung ergibt

$$a_0 = 1.0986\ldots, \quad a_1 = 0.32797\ldots, \quad a_2 = -0.054030\ldots,$$
$$a_3 = 0.018585\ldots, \quad a_4 = -0.0048606\ldots \quad \rightsquigarrow$$

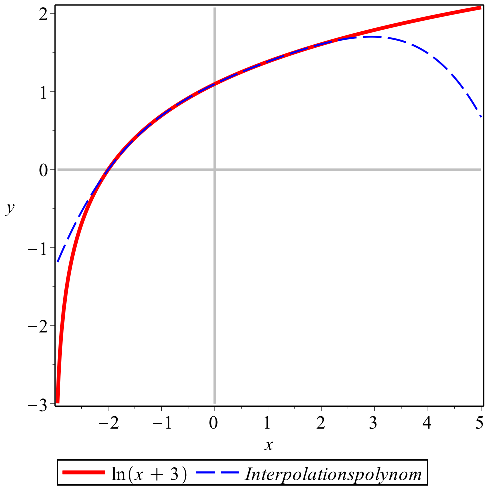
$$p(x) \approx 1.0986 + 0.32798\,x - 0.054031\,x^2 + 0.018585\,x^3 - 0.0048606\,x^4$$

b) – Das Interpolationspolynom p hat Grad 4, und somit auch maximal 4 reelle Nullstellen.

– Da p stetig ist und die y_j für $j = 0\ldots4$ wechselndes Vorzeichen haben, liegt nach dem Zwischenwertsatz jeweils eine Nullstelle im Intervall

$$[x_j, y_j] = [j-1, j], \quad j = 1\ldots4$$

c) Im Interpolationsintervall $[-2, 2]$ ist die Approximation sehr gut; außerhalb nimmt die Güte der Approximation rasch ab.



Anmerkung: Man kann rigorose Fehlerabschätzungen herleiten. Der Interpolationsfehler hängt ab von der Auswertungsstelle und einer höheren Ableitung der Funktion, die interpoliert wurde.

Im Allgemeinen: Bessere Approximation durch höheren Polynomgrad.

□

a) [L] Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + 9$$

b) [L] Sei p ein Polynom und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie:

$$p(x) \text{ wechselt an } x_0 \text{ das Vorzeichen } \Leftrightarrow \text{ Die Vielfachheit von } x_0 \text{ ist ungerade.}$$

Hinweis: Schreiben Sie $p(x) = (x - x_0)^m\, q(x)$, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle x_0 ist und q ein Polynom mit $q(x_0) \neq 0$.

c) [L] Faktorisieren Sie so weit wie möglich:

$$x^5 - x^4 - x + 1$$

d) [L] $(*)$ Sei $p(x) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n$ ein Polynom vom Grad genau n (d.h., $a_n \neq 0$), und es gelte auch $a_0 \neq 0$. Zeigen Sie: [1]

$$a_0\, a_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) \text{ hat eine gerade Anzahl positiver Nullstellen.}$$

Dabei werden Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.

Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}(p(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}(a_n\, x^n)$. Beachten Sie **b)**.

---

a) Man erkennt, dass $x = -1$ eine Nullstelle ist. Nun Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x+1)\,(x^2 - 6x + 9) \\
\underline{-x^3 \;\; - x^2} \\
\quad\;\; -6x^2 + 3x \\
\quad\;\; \underline{\;\;\, 6x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\;\; 9x + 9 \\
\qquad\qquad\; \underline{-9x - 9} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Zusammen mit $x^2 - 6\,x + 9 = (x-3)^2 \quad \rightsquigarrow$

$$x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + 9 \;=\; (x+1)\,(x-3)^2$$

---

b) '$\Leftarrow$' Sei z.B. $q(x_0) > 0$ (für $q(x_0) < 0$ analog).

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $q(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow$ (da m ungerade)

$p(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $\quad p(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ✓

D.h., $p(x)$ wechselt das Vorzeichen an x_0.

$\longrightarrow$

[1] Mit 'gerade Anzahl' ist hier gemeint, dass auch die Anzahl 0 inkludiert ist (keine positive Nullstelle).

'$\Rightarrow$' Kontraposition: Sei m gerade.

Das Argument funktioniert analog wie für '$\Leftarrow$':

Sei z.B. $q(x_0) > 0$ (für $q(x_0) < 0$ analog).

(Wie zuvor:) *Zwischenwertsatz* $\Rightarrow$

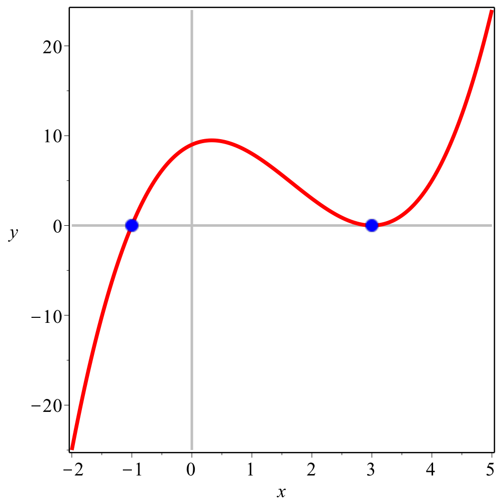
Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $q(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow$ (da m gerade)

$p(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $p(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ✓

D.h., $p(x)$ wechselt das Vorzeichen an x_0 nicht.

– Visualisierung anhand des Beispiels aus **a)** ($p(x) = (x+1)(x-3)^2$) :



c) Man erkennt, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist. Nun Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} x^5 - x^4 - x + 1 = (x-1)\,(x^4 - 1) \\ \underline{-x^5 + x^4} \\ \qquad\quad -x + 1 \\ \qquad\quad \underline{\;\; x - 1} \\ \qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

Zusammen mit $x^4 - 1 = (x^2 - 1)\,(x^2 + 1) = (x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)$ $\rightsquigarrow$

$$x^5 - x^4 - x + 1 \; = \; (x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)$$

$(x^2 + 1) = (x - i)(x + i)$ hat keine reelle Nullstelle.

⟶

d) '$\Leftarrow$' $a_0\, a_n > 0$ bedeutet: a_0 und a_n haben dasselbe Vorzeichen $\Rightarrow$

$$p(0) = a_0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sgn}(p(x)) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sgn}(a_n\, x^n)$$

haben dasselbe Vorzeichen.

$\Rightarrow$ Der Graph von p kreuzt die x-Achse (Vorzeichenwechsel) entweder gar nie oder die Anzahl der Vorzeichenwechsel ist gerade.

$\Rightarrow$ zusammen mit **b)**: Die Anzahl positiver Nullstellen mit ungerader Vielfachheit ist gerade, und dies beweist die Behauptung. ✓

'$\Rightarrow$' folgt in analoger Weise mittels Kontraposition:

Annahme $a_0\, a_n > 0$ – wobei dann die Anzahl der Vorzeichenwechsel ungerade sein muss.

□

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) [L] $\dfrac{1}{x^3+2\,x^2+x}$

c) [L] $\dfrac{x-3}{x^4-2\,x^3-x^2-4\,x-6}$

b) [L] $\dfrac{x-3}{x^2+6\,x+5}$

Hinweis zu **c)** : Achtung – haben Zähler und Nenner eine gemeinsame ist Nullstelle?

---

a) Faktorisierung: $x^3+2\,x^2+x = x\,(x+1)^2$

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{1}{x^3+2\,x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$

$$x^2: \;\; A+B_1=0, \qquad x: \;\; 2\,A+B_1+B_2=0, \qquad 1: \;\; A=1$$

$$\Rightarrow \;\; A=1, \qquad B_1=-1, \qquad B_2=-1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{x^3+2\,x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

---

b) Faktorisierung: $x^2+6\,x+5 = (x+1)\,(x+5)$

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{x-3}{x^2+6\,x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5}$$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$

$$x: \;\; A+B=1, \qquad 1: \;\; 5\,A+B=-3$$

$$\Rightarrow \;\; A=-1, \qquad B=2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x-3}{x^2+6\,x+5} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+5}$$

$\longrightarrow$

c) $x = 3$ ist gemeinsame Nullstelle des Zählers und Nenners.

Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{l}
x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x-3)\,(x^3 + x^2 + 2x + 2) \\
\underline{-x^4 + 3x^3} \\
\quad x^3 - x^2 \\
\quad \underline{-x^3 + 3x^2} \\
\qquad 2x^2 - 4x \\
\qquad \underline{-2x^2 + 6x} \\
\qquad\quad 2x - 6 \\
\qquad\quad \underline{-2x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-3}{x^4 - 2\,x^3 - x^2 - 4\,x - 6} = \frac{1}{x^3 + x^2 + 2\,x + 2}$$

$x = -1$ ist Nullstelle des Nenners. Erneute Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{l}
x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x+1)\,(x^2 + 2) \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad 2x + 2 \\
\qquad \underline{-2x - 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^2 + 2$ ist reell nicht weiter zerlegbar.

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + 2\,x + 2} = \frac{A\,x + B}{x^2 + 2} + \frac{C}{x+1}$$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$

$$x^2: \ A + C = 0, \qquad x: \ A + B = 0, \qquad 1: \ B + 2\,C = 1$$

$$\Rightarrow \ A = -\tfrac{1}{3}, \qquad B = C = \tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-3}{x^4 - 2\,x^3 - x^2 - 4\,x - 6} = \frac{-x+1}{3\,(x^2+2)} + \frac{1}{3\,(x+1)}$$

□

a) [L] Sei $x, y > 0$, $x \neq y$. Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme von Differentialrechnung) die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}\,(\ln x + \ln y) \;<\; \ln\!\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sqrt{x\,y} < \frac{1}{2}(x+y)$.

b) [L] (ohne Rechnerunterstützung:) Wie lautet die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\log_{10}(\log_{10} n) < 3 \quad ?$$

c) [L] Interpretieren Sie die Identität

$$\log_2 10^3 \;=\; 9.965\ldots \;\lesssim\; 10$$

d) [L] Berechnen Sie die beiden Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\Big), \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{k\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\Big)$$

---

a) – Wir zeigen zunächst die sogenannte Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel (für beliebige $x, y \geq 0$) :

$$\begin{aligned} & (x\,y)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \tfrac{1}{2}(x+y) \\ \Leftrightarrow\quad & x\,y \;\leq\; \tfrac{1}{4}(x+y)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 4\,x\,y \;\leq\; x^2 + 2\,x\,y + y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 \;\leq\; (x-y)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Für $x \neq y$ gilt sogar '$<$' statt '$\leq$'. $\checkmark$

– ln monoton wachsend $\;\Rightarrow\;$ für $x \neq y$:

$$\begin{aligned} & \ln\big((x\,y)^{\frac{1}{2}}\big) \;<\; \ln\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big) \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{2}\ln(x\,y) \;<\; \ln\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big) \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{2}(\ln x + \ln y) \;<\; \ln\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

⟶

b) Umformen:

$$\begin{aligned} \log_{10}(\log_{10} n) &< 3 \\ \Leftrightarrow \quad \log_{10} n &< 10^3 \\ \Leftrightarrow \quad n &< 10^{10^3} = 10^{1000} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad n = 10^{1000} - 1 = \underbrace{999\ldots999}_{\text{1000 Ziffern}}$$

(Anmerkung: $\log_{10}(\log_{10} 10^{1000}) = 3$.)

c) Es gilt

$$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10,$$

und $10^3 = 1000$ liegt knapp unter 1024. ✓

Anmerkung: In der Informatik bedeutet (z.B.) 1 Kilobit die Anzahl 1024 bit (nicht etwa 1000 bit).

d) Wegen

$$\ln(n+k) - \ln n = \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\right) = \infty$$

□

Exponentielles Wachstum einer zeitabhängigen Größe $y = y(t)$ für $t > 0$ bedeutet $y(t) = e^{kt}$ mit $k > 0$. Wir sehen uns zwei – über längere Zeiten hinweg – realistischere Wachstumsfunktionen mit Sättigungseffekt an. Sei $s > y_0 > 0$ und $k > 0$.

a) [L]

$$y(t) \;=\; s - (s - y_0)\, e^{-kt}$$

b) [L]

$$y(t) \;=\; \frac{s\, y_0}{y_0 + (s - y_0)\, e^{-kt}}$$

– Charakterisieren Sie das Wachstumsverhalten der beiden Funktionen. Was ist die Bedeutung der Parameter y_0, s und k?

– Bestimmen Sie jeweils den Wert $\tau > 0$, für den gilt

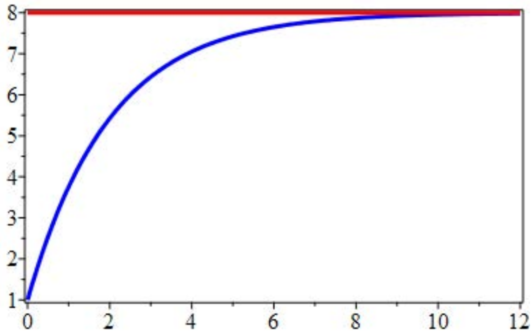
$$y(\tau) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\lim_{t\to\infty} y(t) - y(0)\big)$$

– Wählen Sie die Parameter geeignet, um die beiden Funktionen zu visualisieren, z.B. $y_0 = 1$, $s = 8$ und $k = 0.5$.

---

a) $y(t)$ ist strikt monoton wachsend, und es gilt

$$y(0) = y_0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = s$$



Gesucht: $\tau > 0$ mit

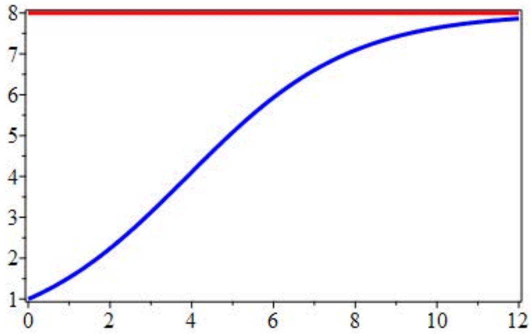
$$\begin{aligned} s - (s - y_0)\, e^{-k\tau} &= \tfrac{1}{2}(y_0 + s) \\ \Leftrightarrow \qquad \cancel{(s - y_0)}\, e^{-k\tau} &= \tfrac{1}{2}\cancel{(s - y_0)} \\ \Leftrightarrow \qquad \tau &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

unabhängig von y_0 und s.

$\longrightarrow$

b) – $y(t)$ ist strikt monoton wachsend, und es gilt

$$y(0) = y_0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = s$$



Gesucht: $\tau > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&& \frac{s\,y_0}{y_0 + (s-y_0)\,e^{-k\tau}} &= \tfrac{1}{2}(y_0+s) \\
\Leftrightarrow && y_0 + (s-y_0)\,e^{-k\tau} &= \frac{s\,y_0}{\tfrac{1}{2}(y_0+s)} \\
\Leftrightarrow && \cancel{(s-y_0)}\,e^{-k\tau} &= \frac{\cancel{s-y_0}}{1+\frac{s}{y_0}} \\
\Leftrightarrow && \tau &= \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{s}{y_0}\right)
\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Funktion aus **b)** verläuft zunächst konkav, passiert einen Wendepunkt und verläuft danach konvex. Dies ist das Ergebnis einer entsprechenden Kurvendiskussion (die hier nicht verlangt war).

□

a) [L] Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 2^x \cdot a, \quad g(x) = 10^x \cdot b$$

wobei $a > b > 0$, und somit $a = f(0) > g(0) = b$.

An welcher Stelle $\xi > 0$ 'überholt' g die Funktion f, d.h., $f(\xi) = g(\xi)$ und $f(x) < g(x)$ für $x > \xi$? Fertigen Sie eine Skizze an.

Wie lautet die Lösung konkret für $a = 525$ und $b = 21$?

b) [L] Für Daten bzw. Funktionen, die über viele Größenordnungen variieren, sind logarithmisch skalierte Darstellungen (Plots) sinnvoll. Bei einem doppelt - logarithmischem Plot einer Funktion $y = f(x)$ wird (z.B.) $\log_{10} y$ über $\log_{10} x$ aufgetragen.

Überlegen Sie, wie ein doppelt-logarithmischer Plot einer Funktion $y = c\,x^p$ aussieht. Wie erkennt man den Wert von p in dem Plot?

c) [L] Welche Art von logarithmischen Plot würden Sie verwenden, um eine Funktion der Gestalt $y = c\,b^x$ zu visualisieren ($b > 0$)?

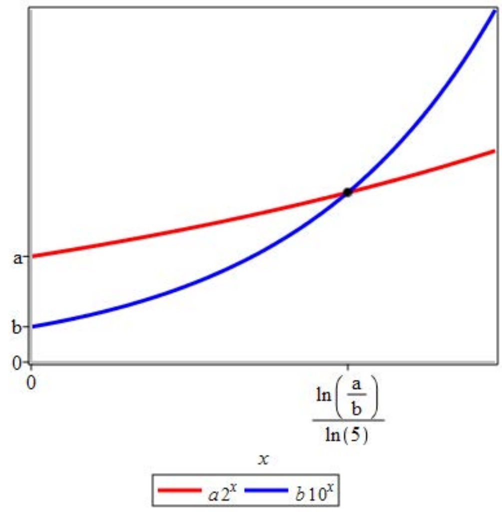
---

a) Auflösen nach ξ:

$$2^\xi \cdot a = 10^\xi \cdot b = 2^\xi \cdot 5^\xi \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 5^\xi \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \quad \xi = \log_5\left(\frac{a}{b}\right) = \log_5 a - \log_5 b = \frac{\ln a - \ln b}{\ln(5)}$$



Konkret für $a = 525$ und $b = 21$:

$$\frac{a}{b} = 25 \quad \rightsquigarrow \quad \xi = \log_5(25) = 2$$

$\longrightarrow$

b) Logarithmieren [2] $\rightsquigarrow$ für $X = \log_{10} x$ und $Y = \log_{10} y$:

$$Y = p\,X + \log_{10} c$$

Im doppelt-logarithmischen Plot erscheint $y = c\,x^p$ als Gerade mit Steigung p.

c) Hier bietet sich an, $Y = \log_{10} y$ über x aufzutragen $\rightsquigarrow$

$$Y = \log_{10} b \cdot x + \log_{10} c$$

Hier erscheint $y = c\,b^x$ als Gerade mit Steigung $\log_{10} b$.

$\square$

[2] Basis 10 ist üblich, aber das ist nicht wesentlich.

Die eindeutige normalisierte halblogarithmische Dezimaldarstellung reeller Zahlen $0 \neq x \in \mathbb{R}$ lautet

$$x \;=\; \pm\, 0\,.\, d_1\, d_2\, d_3\, \ldots \cdot 10^{\,k} \;=\; s \cdot 10^{\,k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mit den Dezimalstellen $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei $d_1 \neq 0$.

Im Folgenden gehen wir jedoch – im Hinblick auf die interne Zahldarstellung auf Digitalrechnern – von der normalisierten Binärdarstellung, aus, d.h.,

$$x \;=\; \pm\, 0\,.\, d_1\, d_2\, d_3\, \ldots \cdot 2^{\,k} \;=\; s \cdot 2^{\,k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mit den Binärstellen $d_j \in \{0, 1\}$, wobei $d_1 = 1$. Das auf Digitalrechnern verwendete normalisierte Gleitpunktzahlensystem $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$ besteht aus endlich vielen rationalen Zahlen, mit einer endlichen Anzahl von Binärstellen von s und einem endlichen Wertebereich für den Exponenten $k \in (k_{\min} < 0, \ldots, k_{\max} > 0)$.

a) [L] Sei $x = s \cdot 2^k > 0$. Drücken Sie

$$\log_2 x \quad \text{und} \quad \ln x = \log_e x$$

mittels s und k aus.

b) [L] Hier geht es um eine mehr praktische Frage:

Sei $\varphi(s)$ eine berechenbare Approximation [1] für $\log_2 s$. Aufgrund von **a)** ist klar, wie man daraus eine Approximation von $\log_2 x$ für beliebige $x \in \mathbb{F}$ gewinnt.

Charley Brown sagt: *Allerdings ist* $\log_2 s$ *unbeschränkt für* $s \to 0+$, *und daher kann man keine derartige mit vernünftigem Rechenaufwand auswertbare Approximationsfunktion* $\varphi(s)$ *angeben. Z.B. sind ja Polynome auf* $(0,1)$ *beschränkt!*

Snoopy sagt: *Aber geh, das passt schon: Es gilt ja …*

– Wer hat recht?

– Wie funktioniert die analoge Konstruktion für $\ln x$?

c) [L] Für $n \to \infty$ wird das asymptotische Verhalten von $n!$ durch die *Stirlingsche Formel* charakterisiert:

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Besser versteht man dieses Wachstumsverhalten, wenn man es logarithmisch ausdrückt. Geben Sie die entsprechende Formel für $\ln n!$ sowie $\log_{10} n!$ an.

[1] Denken Sie an eine am Rechner auswertbare hinreichend genaue Approximation, z.B. Polynominterpolation.

a) Rechenregeln für Logarithmen $\rightsquigarrow$

$$\log_2 x = \log_2(s \cdot 2^k) = \log_2 s + \log_2(2^k) = \log_2 s + k$$

und

$$\ln x = \ln(s \cdot 2^k) = \ln s + \ln(2^k) = \ln s + k \ln 2$$

b) – Snoopy hat recht: Es genügt ja, $\log_2 x$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1)$ zu approximieren, da in der normalisierten Darstellung gilt $s \in [\frac{1}{2}, 1)$. Also:

$$\log_2 x = \log_2 s + q \approx \varphi(s) + q \quad \checkmark$$

– Analog für $\ln x$, mit s, q wie zuvor und

$$\ln x = \ln s + q \ln 2 = \ln 2 \, (\log_2 s + q) \quad \checkmark$$

c) Aus der Stirling-Formel folgt durch Logarithmieren

$$\begin{aligned} \ln n! &\sim \ln\Big((2\pi n)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n\Big) \\ &= \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln\left(\frac{n}{e}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\ln(2\pi) + \ln n\big) + n\,(\ln n - 1) \\ &= \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) + (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n \end{aligned}$$

Hier ist $n \ln n$ der dominante Term, d.h., das Wachstum von $\ln n!$ ist etwas schneller als linear [2] in n für $n \to \infty$.

Analog für $\log_{10} n = \ln n / \ln 10$.

Zahlenbeispiel: Für $n = 10^6 = 100\,000$ ist $\log_{10} n! \approx 456\,573.45$, d.h., $100\,000!$ hat $456\,574$ Dezimalstellen.

□

[2] $\ln n$ wächst ja sehr langsam gegen ∞ für $n \to \infty$.

a) [L] Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens

$$\tan(x+y) \;=\; \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$$

b) [L] Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ kann man mittels $\tan \frac{x}{2}$ ausdrücken:

$$\cos x = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\,, \qquad \sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$$

Beweisen Sie die Identität für $\cos x$. Wie erhält man daraus die Identität für $\sin x$?

---

a) Wir verwenden die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und formen um:

$$\tan(x+y) \;=\; \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \;=\; \frac{\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y}{\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\,\cos y + \sin y}{\cos y - \frac{\sin x}{\cos x}\,\sin y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{\sin y}{\cos y}} \qquad \checkmark$$

---

b) – Wir setzen $\frac{x}{2} := \xi \quad \rightsquigarrow$

$$\frac{1-\tan^2\xi}{1+\tan^2\xi} \;=\; \frac{1-\frac{\sin^2\xi}{\cos^2\xi}}{1+\frac{\sin^2\xi}{\cos^2\xi}} \;=\; \frac{\cos^2\xi - \sin^2\xi}{\cos^2\xi + \sin^2\xi} \;=\; \cos^2\xi - \sin^2\xi$$

$$= \;\cos\xi\,\cos\xi - \sin\xi\,\sin\xi \;=\; \cos(\xi+\xi) \;=\; \cos x \qquad \checkmark$$

Hier wurde das Additionstheorem für cos verwendet.

– Die Identität für $\sin x$ ergibt sich (entweder wiederum direkt oder) aus (setze $t = \tan\frac{x}{2}$)

$$\sin x \;=\; \sqrt{1-\cos^2 x} \;=\; \sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \;=\; \ldots \;=\; \sqrt{\frac{4\,t^2}{(1+t^2)^2}} \qquad \checkmark$$

$\square$

a) [L] Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right) \qquad \text{(a)}$$

Hinweis: $\tan(u+v) = \ldots$
Damit gilt insbesondere $2\arctan x = \arctan\left(\frac{2\,x}{1-x^2}\right)$.

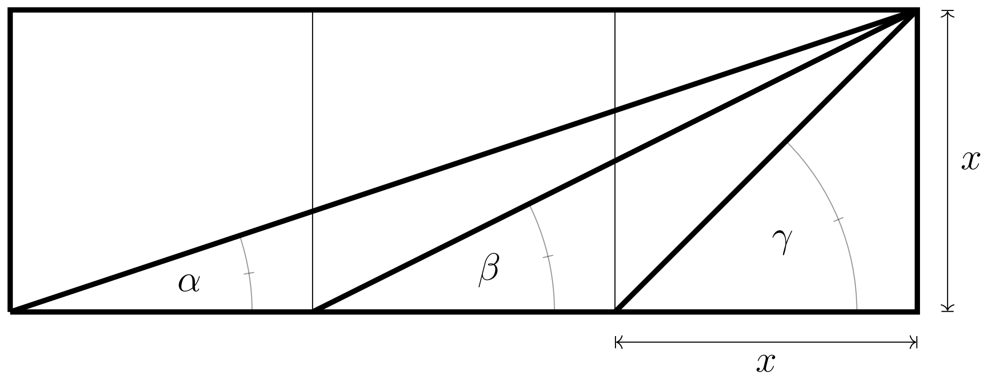
b) [L] Verwenden Sie (a), um zu zeigen

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} \qquad \text{(b)}$$

Hinweis (eine Spielerei ...): Wenden Sie dreimal (a) an. Wählen Sie zunächst $x = y = \frac{1}{5}$, sodann $x = y = \ldots$, und überlegen Sie weiter. Die 'magische Zahl' ist $\left(1+\frac{1}{239}\right)/\left(1-\frac{1}{239}\right)$. Beachten Sie auch $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

c) [L] Zeigen Sie, dass für die Winkel wie in der Grafik gilt

$$\alpha + \beta = \gamma$$



a) Gehe aus vom Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(u+v) \;=\; \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u\,\tan v}$$

Setze $\tan u = x,\ \tan v = y$, also $u = \arctan x,\ v = \arctan y$.

Wende auf beiden Seiten arctan an $\rightsquigarrow$

$$u + v \;=\; \arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right) \qquad \checkmark$$

b) – Setze $x = y = \frac{1}{5}$ in (a) $\rightsquigarrow$

$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

$\longrightarrow$

– Setze $x = y = \frac{5}{12}$ in (a) $\rightsquigarrow$

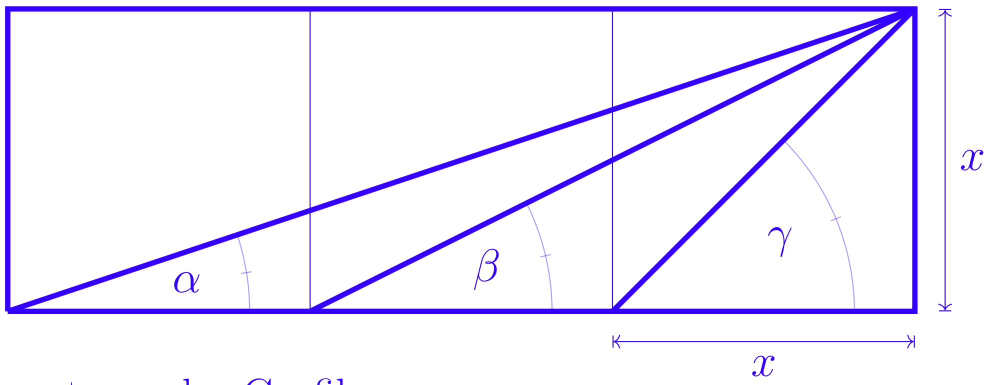
$$\underline{4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)} = 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) = \underline{\arctan\left(\frac{120}{119}\right)}$$

– Andererseits gilt mit $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$:

$$\underline{\arctan\left(\frac{120}{119}\right)} = \arctan\left(\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}}\right) = \underline{\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right)}$$

$\Rightarrow$ (b) ✓

c)



Man erkennt aus der Grafik:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \quad \gamma = \arctan 1$$

Mit **a)** folgt

$$\alpha + \beta = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}}\right) = \arctan(1) = \gamma$$

Anmerkung: (b) ist als *Machinsche Formel* bekannt (John Machin, 1706). Machin suchte nach einer Reihenentwicklung für $\frac{\pi}{4}$, die schneller konvergiert als die klassische Leibniz-Reihe (die Taylorreihe von arctan ausgewertet an $x = 1$)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots$$

Mittels Kombination der Reihenentwicklungen der beiden Terme auf der linken Seite von (b) erhält man eine wesentlich schneller konvergente Reihe.

□