Aufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 1: Differenzieren üben (i)

Aufgabe 2: Sieben mal dürfen Sie raten

Aufgabe 3: L

Aufgabe 4: l'H

Aufgabe 5: (∗) Differenzieren üben (ii)

Aufgabe 6: (∗) Zum Thema 'Ableitung der Umkehrfunktion'

Aufgabe 7: (∗) Analyse der Monotonie einer Interpolierenden

Aufgabe 8: (∗) Geschwindigkeit entlang einer Hyperbelbahn

Aufgabe 9: (ein bisschen theorielastig):
Qualitative Argumentation der Existenz einer Nullstelle

Aufgabe 10: Approximation der zweiten und dritten Ableitung

Berechnen Sie die Ableitungen nach x :

a) [L] $\frac{d}{dx}\cos(\alpha\sin(\beta x))$

b) [L] $\frac{d}{dx}\big(f(g(h(x)))\big)^2$

c) [L] **(i)** $\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\big)$ **(ii)** $\frac{d}{dx}\big(f_1(x)\cdots f_n(x)\big),\quad n\in\mathbb{N}$

Hinweis zu **(ii)**: Verwenden Sie $\sum$ und $\prod$, um das Ergebnis auszudrücken. Kürzen Sie ab: $\frac{d}{dx}f_k(x) = f_k'$.

d) [L] $\frac{d}{dx}x^x,\quad x>0$

e) [L] $\frac{d}{dx}f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x^2-8, & x<3 \\ 1+\ln(x-2), & x\geq 3 \end{cases}$

Was passiert an der Stelle $x=3$?

f) [L] $\frac{d}{dx}f^{-1}(g(x))$

---

a) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\cos(\alpha\sin(\beta x)) = -\alpha\beta\sin(\alpha\sin(\beta x))\cos(\beta x)$$

---

b) Kettenregel mehrfach $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(h(x)))\big)^2 = 2\,f(g(h(x)))\,f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)$$

---

c) **(i)** Produktregel $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\big) \\ &= \frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x) + \big(f(x)\cdot g(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}h(x) \\ &= (f'g+fg')\,h + fg\,h' = f'g\,h + fg'h + fg\,h' \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

(ii) Analog wie in **(i)** ($n = 3$) für allgemeine $n \in \mathbb{N}$:

Ein einfaches Induktionsargument zeigt

$$(f_1 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{k-1} f_j \cdot f_k' \cdot \prod_{j=k+1}^{n} f_j \Big)$$

---

d) Kettenregel & Produktregel $\rightsquigarrow$

$$\tfrac{d}{dx}\, x^x = \tfrac{d}{dx}\, e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \cdot \tfrac{d}{dx}\,(x \ln x)$$
$$= e^{x \ln x}\big(x\, \tfrac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\big) = (1 + \ln x)\, x^x$$

---

e) Die Funktion ist stetig, mit $f(3) = 1$. Weiters:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 3 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 3 \end{cases}$$

An $x = 3$ ist f nicht differenzierbar, da linksseitige und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen (Eckpunkt):

$$\lim_{x \to 3-} f'(x) = 6, \qquad \lim_{x \to 3+} f'(x) = 1$$

---

f) Kettenregel & Ableitungsregel für Umkehrfunktion $\rightsquigarrow$

$$\tfrac{d}{dx}\, f^{-1}(g(x)) = \big(f^{-1}\big)'(g(x))\, g'(x) = \frac{g'(x)}{f'(f^{-1}(g(x)))}$$

$\square$

Überlegen Sie, wie die möglichen (reellen) Lösungen $u(x)$ der folgenden Differentialgleichungen aussehen. D.h., es ist jeweils eine reelle Funktion $u(x)$ möglichst allgemein zu anzugeben, so dass gilt

a) [L] $u'(x) = \lambda\, u(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) [L] $u''(x) = \omega^2\, u(x), \quad \omega > 0$

Hinweis: Zwei Lösungstypen. *What about* $\omega = 0$?

c) [L] Fortsetzung von **b)**: Denken Sie an Hyperbelfunktionen (falls Sie nicht schon zuvor daran gedacht haben).

d) [L] $u''(x) = -\omega^2\, u(x), \quad \omega > 0$

e) [L] $u^{(4)}(x) = \omega^4\, u(x), \quad \omega > 0$

f) [L] $u^{(n)}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$

g) [L] $u(x)\, u'(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche $x > 0$ ist die Lösung reellwertig?

---

a) Allgemeine Lösung von $u'(x) = \lambda\, u(x)$:

$$u(x) \;=\; c\, e^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

---

b) Zwei Lösungstypen $u = u_1, u_2$ für $u''(x) = \omega^2\, u(x)$:

$$u_1(x) \;=\; C_1\, e^{\omega x}, \quad u_2(x) \;=\; C_2\, e^{-\omega x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung (mittels Superposition):

$$u(x) \;=\; C_1\, e^{\omega x} + C_2\, e^{-\omega x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Die Superposition ist O.K., weil

$$u'(x) \;=\; u_1'(x) + u_2'(x) \;=\; \omega^2\, u_1(x) + \omega^2\, u_2(x) \;=\; \omega^2\, u(x) \quad \checkmark$$

$\omega = 0$ ist ein Sonderfall: $u(x) = C_0 + C_1\, x$.

---

c) Man kann in **b)** auch so superponieren:

$$u(x) \;=\; C_1 \cosh(\omega\, x) + C_2 \sinh(\omega\, x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$

d) Ähnlich wie in **c)**, aber mit cos, sin anstelle von cosh, sinh:

$$u(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

---

e) Ähnlich wie in **c)**, **d)**:

$$u(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x) + C_3 \cos(\omega x) + C_4 \sin(\omega x)$$

(direkt zu verifizieren).

---

f) Allgemeine Lösung von $u^{(n)}(x) = 0$:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq n-1$.

---

g) Aus $u(x)\, u'(x) = \frac{1}{2} (u^2)'(x)$ folgt

$$(u^2)'(x) = 2c \quad \Rightarrow \quad u^2(x) = 2cx + D, \quad D \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$u(x) = \pm\sqrt{2cx + D}, \quad D \in \mathbb{R},$$

diese ist reell für alle x mit $2cx + D \geq 0$.

□

a) [L] Bestimmen Sie die [kleinstmögliche] Lipschitzkonstante für die Funktion
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad x \in [0,1]$

(i) direkt ausgehend von der Definition der Lipschitz-Stetigkeit,

(ii) mittels Differentialrechnung.

b) [L] Beweisen Sie die globale Lipschitz-Stetigkeit der (nichtnormierten) Gaußschen Glockenkurve $f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in \mathbb{R}$

Wie lautet die kleinstmögliche Lipschitzkonstante?

---

a) **(i)** Faktorisierung von $f(x) - f(y) = x^n - y^n \quad \rightsquigarrow$

$$|x^n - y^n| = |x^{n-1} + x^{n-2}\,y + \ldots + x\,y^{n-2} + y^{n-1}| \cdot |x-y|$$
$$\leq \max_{x,y\,\in\,[0,1]} |x^{n-1} + x^{n-2}\,y + \ldots + x\,y^{n-2} + y^{n-1}| \cdot |x-y|$$
$$= n\,|x-y|$$

$\Rightarrow$ Lipschitzkonstante $L = n$

(ii) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ kleinstmögliche Lipschitzkonstante:

$$L = \max_{x\,\in\,[0,1]} |f'(x)| = n$$

---

b) f ist gerade. Verwende Mittelwertsatz. Ableitung von f:

$$f'(x) = -2\,x\,e^{-x^2} \quad \text{(ungerade)}$$

Es gilt $f'(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ (Nachweis z.B. mittels de l'Hospital).
Minimaler und maximaler Wert von f' für $f''(x) = 0$, mit

$$f''(x) = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2} \quad \text{(gerade)}$$

$\Rightarrow$

$$x_{\text{min}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_{\text{max}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit

$$f'(x_{\text{min}}) = -\sqrt{\frac{2}{e}}, \quad f'(x_{\text{max}}) = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$\Rightarrow$ kleinstmögliche Lipschitzkonstante:

$$L = \sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.858$$

□

Berechnung der Grenzwerte von Funktionen mittels Regel von de l'Hospital (l'H) :

a) [L]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \ ?$$

Argumentieren Sie auch direkt mittels Ableitung, ohne Bezugnahme auf l'H.

b) [L]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = \ ?$$

c) [L]

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^2+n+4}{n^2+3}\Big)^n = \ ?$$

Hinweis: log.

---

a) '0/0', mit $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Bzw. ganz direkt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \,\Big|_{x=0} = \cos 0 = 1 \quad \checkmark$$

---

b) '0/0', mit $\sin(x^2) = O(x^2)$ und $\sin^2 x = O(x^2)$ für $x \to 0$

$\rightsquigarrow \quad 2\times$ l'H $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\cdot 2\,x}{2\sin x \cdot \cos x} \overset{\text{l'H}}{=} \dots = 1$$

---

c) Mit

$$\frac{n^2+n+4}{n^2+3} = 1 + \frac{n+1}{n^2+3} \approx 1 + \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty$$

vermutet man: Der Grenzwert lautet e. Ein sauberer elementarer Beweis dafür ist eher mühsam. 'l.H' ist hier praktisch, indem man n als als kontinuierliche Variable auffasst und logarithmiert:

$$\ln\left(1+\tfrac{n+1}{n^2+3}\right)^n = n\ln\left(1+\tfrac{n+1}{n^2+3}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{n+1}{n^2+3}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$\rightsquigarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\tfrac{n+1}{n^2+3}\right)^n \overset{\text{l'H}}{=} \dots = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(n+3)(n-1)}{(n^2+3)^2}}{-\frac{1}{n^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+4}{n^2+3}\right)^n = e \quad \checkmark$$

$\square$

a) [L] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{d^j}{dx^j}(x-\xi)^n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

b) [L] Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Familie von Polynomen vom Grad n der Gestalt

$$p_{k,n}(x) \;=\; x^k\,(1-x)^{n-k}, \quad k = 0\ldots n$$

Sei $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Charakterisieren Sie $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, so dass gilt

$$p_{k,n}^{(j)}(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_{k,n}^{(j)}(1) = 0$$

---

a) Für $j = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$\begin{aligned}
j = 0: &\quad \frac{d^0}{dx^0}(x-\xi)^n &&= (x-\xi)^n\\
j = 1: &\quad \frac{d^1}{dx^1}(x-\xi)^n &&= n\cdot(x-\xi)^{n-1}\\
j = 2: &\quad \frac{d^2}{dx^2}(x-\xi)^n &&= n(n-1)\cdot(x-\xi)^{n-2}\\
&&&\vdots\\
j = n-1: &\quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-\xi)^n &&= n(n-1)\cdots 2\cdot(x-\xi)^1\\
j = n: &\quad \frac{d^n}{dx^n}(x-\xi)^n &&= n!\\
j > n: &\quad \frac{d^j}{dx^j}(x-\xi)^n &&= 0
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

$$\frac{d^j}{dx^j}(x-\xi)^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-j)!}(x-\xi)^{n-j}, & j \le n\\ 0, & j > n \end{cases}$$

---

b) Leibniz'sche Produktregel für höhere Ableitungen $\rightsquigarrow$

$$p_{k,n}^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} \frac{d^\ell}{dx^\ell}x^k \cdot \frac{d^{j-\ell}}{dx^{j-\ell}}(1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{j}{0} x^k \cdot \frac{d^j}{dx^j}(1-x)^{n-k} + \binom{j}{1}\frac{d}{dx}x^k \cdot \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(1-x)^{n-k} + \ldots + \binom{j}{j}\frac{d^j}{dx^j}x^k \cdot (1-x)^{n-k}$$

$\rightsquigarrow$

- $j < k \quad \Leftrightarrow \quad p_{k,n}^{(j)}(0) = 0$
- $j < n-k \quad \Leftrightarrow \quad p_{k,n}^{(j)}(1) = 0$

$\square$

a) [L] Jede Funktion der Gestalt

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad y = f(x) = x^{\,c} \quad (c \in \mathbb{N})$$

ist bijektiv und differenzierbar. Es gilt $f^{-1}(y) = y^{\,1/c}$, $f'(x) = c\,x^{\,c-1}$, und

$$\big(f^{-1}\big)'(y) \;=\; \tfrac{1}{c}\,y^{\,1/c-1}$$

Herr Rembremerdeng überlegt, ob diese Formel für $\big(f^{-1}\big)'(y)$ tatsächlich richtig ist.[1] Immerhin kennt er den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und kommt so auf das richtige Ergebnis. Wie lautet seine Argumentation?

b) [L] Die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad y = f(x) = x\,e^x$$

ist bijektiv (da strikt monoton wachsend) und differenzierbar. Ihre Umkehrfunktion $W(y) := f^{-1}(y)$ lässt sich nicht direkt durch elementare Standardfunktionen darstellen.

Drücken Sie $W'(y)$ mittels y und $W(y)$ aus. (Anders ausgedrückt: Leiten Sie eine Differentialgleichung für $W(y)$ her.)

---

a) Ableitung der Umkehrfunktion: Für $y = f(x) = x^{\,c}$ gilt

$$\big(f^{-1}\big)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \;=\; \frac{1}{c\,x^{\,c-1}} \quad \text{mit} \quad x = f^{-1}(y) = y^{\,1/c}$$

$\leadsto$

$$\big(f^{-1}\big)'(y) \;=\; \frac{1}{c\,\big(y^{\,1/c}\big)^{\,c-1}} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{1}{y^{\,1-1/c}} \;=\; \frac{1}{c}\,y^{\,1/c-1} \quad \checkmark$$

---

b) Ableitung der Umkehrfunktion: Für $y = f(x) = x\,e^x$ gilt

$$W'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(1+x)\,e^x} = \frac{x}{x\,e^x(1+x)} \quad \text{mit } x = W(y),\ x\,e^x = y$$

$\leadsto$

$$W'(y) \;=\; \frac{W(y)}{y\big(1+W(y)\big)}$$

Anmerkung: Die Funktion W heißt ‘Lambert W-Funktion’.

---

[1] Für $c > 1$ ist ja $1/c \notin \mathbb{N}$. Natürlich wissen wir, dass das O.K. ist, aber R. hat in der Vorlesung mit seinem Handy gespielt und nicht aufgepasst.

a) [L] Wie lautet die quadratische Interpolierende $p(x)$ zu den Daten

$$\{(0,0),\ (\tfrac{1}{2},d),\ (1,1)\} \quad (d \in \mathbb{R}) \quad ?$$

b) [L] Für welche Werte von $d \in [0,1]$ gilt

$$p(x) \in [0,1] \quad \text{für alle } x \in [0,1] \quad ?$$

Zeigen Sie auch: In diesem Fall ist p strikt monoton wachsend (S.M.$\uparrow$) auf $[0,1]$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Nullstellen von $p(x)$ und $p(x)-1$ an.

---

a) $p(0)=0, p(\frac{1}{2})=d, p(1)=1 \quad \rightsquigarrow \ \ldots \ \rightsquigarrow$

$$p(x) \;=\; (2-4\,d)\,x^2 + (4\,d-1)\,x$$

---

b)
- Sonderfall $d=\frac{1}{2}$: $p(x)=x$ S.M.$\uparrow$ auf $[0,1]$ ✓
- Allgemeiner Fall $(d \neq \frac{1}{2})$:
  - Nullstellen von $p(x)$: $x=0$, sowie[1] $\xi = \dfrac{4\,d-1}{4\,d-2}$

    Es gilt
    $$p(x) > 0 \ \text{ für alle } x \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \notin (0,1)$$
    d.h.
    $$\begin{array}{llll} \text{entweder} & \xi \le 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \le d < \frac{1}{2} \\ \text{oder} & \xi \ge 1 & \Leftrightarrow & d > \frac{1}{2} \end{array}$$
  - Nullstellen von $p(x)-1$: $x=1$, sowie[2] $\eta \;=\; \dfrac{1}{4\,d-2}$

    Es gilt
    $$p(x) < 1 \ \text{ für alle } x \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \eta \notin (0,1)$$
    d.h.
    $$\begin{array}{llll} \text{entweder} & \eta \le 0 & \Leftrightarrow & d < \frac{1}{2} \\ \text{oder} & \eta \ge 1 & \Leftrightarrow & \frac{1}{2} < d \le \frac{3}{4} \end{array}$$

$\Rightarrow$
$$p(x) \in [0,1] \quad \text{für alle } x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad d \in \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right]$$

$\longrightarrow$

---

[1] Für $d=\frac{1}{4}$ ist $\xi=0$ doppelte Nullstelle.
[2] Für $d=\frac{3}{4}$ ist $\xi=1$ doppelte Nullstelle.

- Nachweis der strikten Monotonie von p auf $[0,1]$ für $d \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$:

Ableitung von $p(x)$:

$$p'(x) \;=\; 2\,(2-4\,d)x + (4\,d-1)$$

$\rightsquigarrow$ für $x \in (0,1)$:

(i) $\underline{d \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$ (mit $2-4\,d > 0$ und $4\,d-1 \geq 0$) :

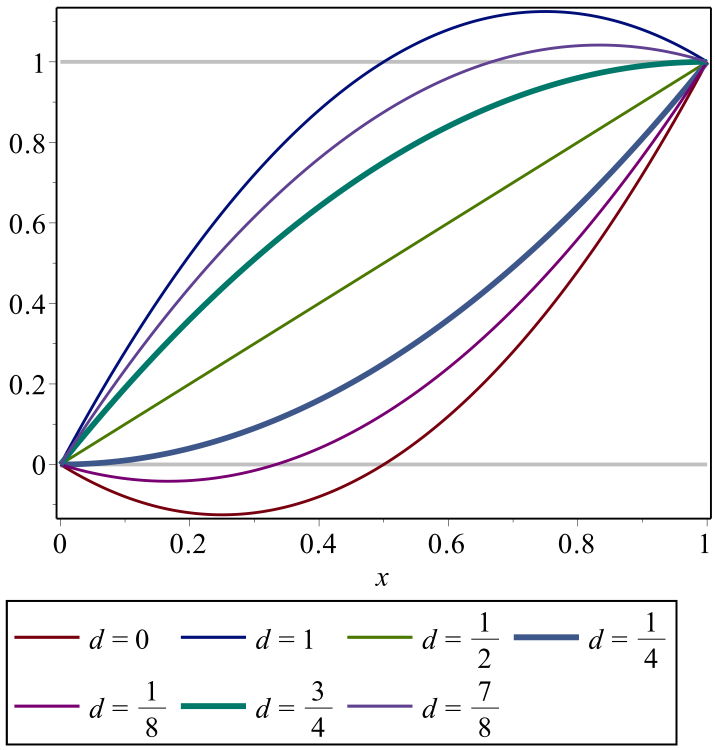
$$p'(x) > 4\,d-1 \geq 0 \quad \text{S.M.}\uparrow \quad \checkmark$$

(ii) $\underline{d \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]}$ (mit $2-4\,d < 0$ und $4\,d-3 \geq 0$) :

$$\begin{aligned} p'(x) \;&\geq\; 2\,(2-4\cdot\tfrac{3}{4})\,x + (4\,d-1) \;=\; -\,2\,x + 4\,d - 1 \\ &> \; -\,2 + 4\,d - 1 \;=\; 4\,d - 3 \geq 0 \quad \text{S.M.}\uparrow \quad \checkmark \end{aligned}$$

(Der Sonderfall $d = \frac{1}{2}$ entspricht dem Grenzfall zwischen (i) und (ii).)

Verlauf von $p(x)$:



Wir betrachten den rechten Ast einer Hyperbel, der durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a\,\cosh\varphi \\ y(\varphi) &= b\,\sinh\varphi \end{aligned}\,,\quad \varphi\in\mathbb{R}$$

gegeben ist (mit vorgegebenen Konstanten $a, b > 0$).
Sei $\varphi = \varphi(t)$ eine Funktion der Zeit t; dann repräsentiert die *vektorwertige* Funktion

$$t \mapsto P(t) = \big(x(\varphi(t)), y(\varphi(t))\big)$$

eine zeitabhängige Bewegung eines Punktes P entlang des Hyperbelastes.

a) [L] Denken Sie sich die Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben. Dann repräsentiert die vektorwertige Funktion

$$t \mapsto v(t) = \big(\tfrac{d}{dt}\,x(\varphi(t)), \tfrac{d}{dt}\,y(\varphi(t))\big)$$

den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung (tangential zur Bahnkurve) als Funktion von t. Geben Sie die Funktion $v(t)$ explizit an (in Abhängigkeit von $\varphi(t)$).

b) [L] Gesucht sind nun diejenige Funktionen $\varphi(t)$, für die die Bewegung des Punktes entlang des Hyperbelastes mit *konstanter Geschwindigkeit* erfolgt.

Leiten Sie eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi''(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t))$$

her, deren Lösungen $\varphi(t)$ die gewünschte Eigenschaft haben. Wie lautet die Funktion f ?

---

a) Geschwindigkeitsvektor (mittels Kettenregel) :

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\,x(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt}\,y(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\frac{d}{dt}\cosh(\varphi(t)) \\ b\,\frac{d}{dt}\sinh(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\sinh(\varphi(t))\,\varphi'(t) \\ b\,\cosh(\varphi(t))\,\varphi'(t) \end{pmatrix}$$

⟶

b) Quadrat der Länge des Geschwindigkeitsvektors aus **a)**: [1]

$$\left(a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi\right) (\varphi')^2$$

Forderung: Dies soll konstant sein $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}\Big(\left(a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi\right) (\varphi')^2\Big) \\ &= \left(2\, a^2 \sinh \varphi\, \cosh \varphi + 2\, b^2 \cosh \varphi\, \sinh \varphi\right) (\varphi')^3 \\ &\quad + \left(a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi\right) 2\, \varphi' \varphi'' \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

- Entweder gilt $\varphi' = 0$ ('Stillstand'),
- oder für $\varphi' \neq 0$: Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'' = f(\varphi, \varphi') &= \frac{(a^2 + b^2) \sinh \varphi\, \cosh \varphi}{a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi} (\varphi')^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sinh(2\, \varphi)}{a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi} (\varphi')^2 \end{aligned}$$

$\square$

[1] Hier lassen wir der übersichtlicheren Schreibweise halber das Argument t weg. In der Rechnung verwenden wir Produktregel und Kettenregel.

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1[a,b]$ mit der Eigenschaft

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{und} \quad f'(a) \cdot f'(b) > 0$$

a) [L] Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a,b)$, so dass f auf $[a,\xi]$ strikt monoton (wachsend oder fallend) ist.

b) [L] Zeigen Sie: f hat (mindestens) eine Nullstelle in (a,b).

Anmerkung: Anhand einer Skizze erkennt man 'optisch', dass diese Behauptungen sehr plausibel sind. Sie sollen jedoch einen formal sauberen Beweis führen.

Sei z.B. $f'(a) > 0$ und $f'(b) > 0$ (anders herum alles analog).

a) Laut Voraussetzung ist f' stetig. 'Vorzeichenbeständigkeit' $\Rightarrow$
Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,\xi]$.
D.h., f ist auf $[a,\xi]$ strikt monoton wachsend. ✓

---

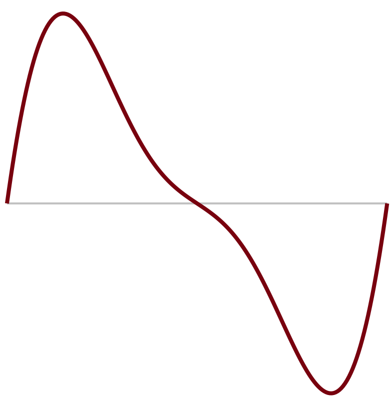
b) Aus **a)** folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in (a,\xi]$.
Analog zu **a)**: Es gibt ein $\eta \in (a,b)$ mit $f(y) < 0$ für alle $y \in [\eta, b)$.
$\Rightarrow$ Es gibt x, y mit $a < x < y < b$ mit

$$f(x) > 0 > f(y)$$

Zwischenwertsatz für f $\Rightarrow$

Es gibt ein $z \in (x,y) \subseteq (a,b)$ mit $f(z) = 0$. ✓

Beispiel:



□

Die folgenden Differenzenquotienten werden (für hinreichend kleines h) zur numerischen Approximation der entsprechenden Ableitungen verwendet, falls ein Formelausdruck für die Ableitungsfunktion f' nicht verfügbar ist. Hier ist zu zeigen, dass diese für $h \to 0$ tatsächlich gegen die genannten Ableitungen konvergieren.

a) [L] Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

b) [L] Sei f dreimal stetig differenzierbar. Für welchen Wert von $c \neq 0$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + 2\,f(x-h) - f(x-2\,h)}{c\,h^3} = f'''(x) \quad ?$$

Wir verwenden mehrfach die Regel von de l'Hospital (‘0/0’, Ableitung nach h für festes x).

a)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2\,h}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x) \quad \checkmark$$

da f, f', f'' stetig.

---

b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + 2\,f(x-h) - f(x-2\,h)}{c\,h^3}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{2\,f'(x+2\,h) - 2\,f'(x+h) - 2\,f'(x-h) + 2\,f'(x-2\,h)}{3\,c\,h^2}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{4\,f''(x+2\,h) - 2\,f''(x+h) + 2\,f''(x-h) - 4\,f''(x-2\,h)}{6\,c\,h}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{8\,f'''(x+2\,h) - 2\,f'''(x+h) - 2\,f'''(x-h) + 8\,f'''(x-2\,h)}{6\,c}$$

$$= f'''(x) \quad \text{für } c = 2$$

da f, f', f'', f''' stetig.

□