Aufgaben zu Kapitel 2 – 4

Gegeben seien zwei Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$.

Angenommen, die Komposition $g \circ f$ ist **bijektiv**. Welche der folgenden Aussagen ist dann wahr, welche ist falsch?[1] Bei wahren Aussagen geben Sie einen Beweis an, bei falschen Aussagen ein Gegenbeispiel.

a) [L] f ist injektiv. **c)** [L] g ist injektiv.

b) [L] f ist surjektiv. **d)** [L] g ist surjektiv.

e) [L] Wie **a)** – **d)**, aber unter der Annahme $g \circ f$ **injektiv**.

f) [L] Wie **a)** – **d)**, aber unter der Annahme $g \circ f$ **surjektiv**.

---

a) Seien $x, \tilde{x} \in X$. Beweis indirekt: Annahme: $f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) = (g \circ f)(\tilde{x})$$

$g \circ f$ ist laut Annahme bijektiv, also auch injektiv $\Rightarrow x = \tilde{x}$.

$\Rightarrow$ f ist injektiv.

---

b) f muss ist nicht surjektiv sein.

Gegenbeispiel: Sei $X = Z = \{a\}$ und $Y = \{a, b\}$, mit $a \neq b$:

$$\{a\} \xrightarrow{f} \{a, b\} \xrightarrow{g} \{a\}$$

Sei $f(a) = a$ und $g(a) = g(b) = a$. $\rightsquigarrow$

$g \circ f = \mathrm{id}$ ist bijektiv, aber f ist nicht surjektiv. ✓

---

c) Das Gegenbeispiel aus **b)** funktioniert auch hier. $\rightsquigarrow$

g muss nicht injektiv sein.

---

d) g ist surjektiv.

Beweis am einfachsten indirekt: Fall g nicht surjektiv ist, dann kann auch $g \circ f$ nicht surjektiv, also nicht bijektiv sein. ✓

$\longrightarrow$

[1] Mit ‘wahr’ ist gemeint, dass aus der Annahme mit Sicherheit die behauptete Aussage folgt. Mit ‘falsch’ ist gemeint, dass dies nicht zutrifft (dies bedeutet jedoch nicht, dass die behauptete Aussage auf jeden Fall falsch sein muss).

e) Bei **a)** wurde lediglich die Injektivität von $g \circ f$ verwendet

$\rightsquigarrow$ Aussage unverändert.

Das Gegenbeispiel zu **b), c)** funktioniert auch hier, da $g \circ f = \mathrm{id}$ injektiv.

$\rightsquigarrow$ Aussagen unverändert.

ad **d)**: g muss <u>nicht</u> surjektiv sein.

<u>Gegenbeispiel:</u> Sei $X = \{a\}$, $Y = \{a, b\}$ und $Z = \{a, b, c\}$ (wobei a, b, c paarweise verschieden),

$$\{a\} \xrightarrow{f} \{a, b\} \xrightarrow{g} \{a, b, c\}$$

mit

$$f(a) = a,$$
$$g(a) = a, \quad g(b) = b$$

$\rightsquigarrow$ $g \circ f$ injektiv, aber g nicht surjektiv. ✓

---

f) ad **a)**: f muss <u>nicht</u> injektiv sein.

<u>Gegenbeispiel:</u> Sei $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ und $Z = \{a\}$ (wobei a, b, c paarweise verschieden),

$$\{a, b, c\} \xrightarrow{f} \{a, b\} \xrightarrow{g} \{a\}$$

mit

$$f(a) = a, \quad f(b) = b, \quad f(c) = a,$$
$$g(a) = a, \quad g(b) = a$$

$\rightsquigarrow$ $g \circ f$ surjektiv, aber f nicht surjektiv. ✓

Das Gegenbeispiel zu **b), c)** funktioniert auch hier, da $g \circ f = \mathrm{id}$ surjektiv.

$\rightsquigarrow$ Aussagen unverändert.

Bei **d)** wurde lediglich die Surjektivität von $g \circ f$ verwendet

$\rightsquigarrow$ Aussage unverändert.

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x + 4$$

a) [L] Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c+\xi) = f(c-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

b) [L] Zeigen Sie, dass f, aufgefasst als Funktion von $[c, \infty)$ nach $\mathbb{R}$, injektiv ist (mit c aus **b)**). Wo nimmt f den minimalen Funktionswert an?

c) [L] Zeichnen Sie den Graphen von f.

d) [L] Bestimmen Sie das Urbild des Intervalles $[4, 6]$, d.h., die Menge

$$f^{-1}([4,6]) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}\colon\; 4 \le f(x) \le 6\}$$

---

a) Aus

$$\begin{aligned} f(c+\xi) &= (c+\xi)^2 + (c+\xi) + 4 \\ &= c^2 + 2\,c\,\xi + \xi^2 + c + \xi + 4 \\ &= \xi^2 + (2\,c+1)\,\xi + f(c) \end{aligned}$$

und

$$f(c-\xi) \;=\; \xi^2 - (2\,c+1)\,\xi + f(c)$$

folgt

$$f(c+\xi) \equiv f(c-\xi) \quad \text{für} \quad c = -\tfrac{1}{2}$$

D.h., $g(\xi) := f(c+\xi)$ ist eine gerade Funktion, $g(\xi) \equiv g(-\xi)$.

---

b) Für $0 < \xi_1 < \xi_2$ gilt (mit $c = -\frac{1}{2}$ aus **a)** und $f(c) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{15}{4}$)

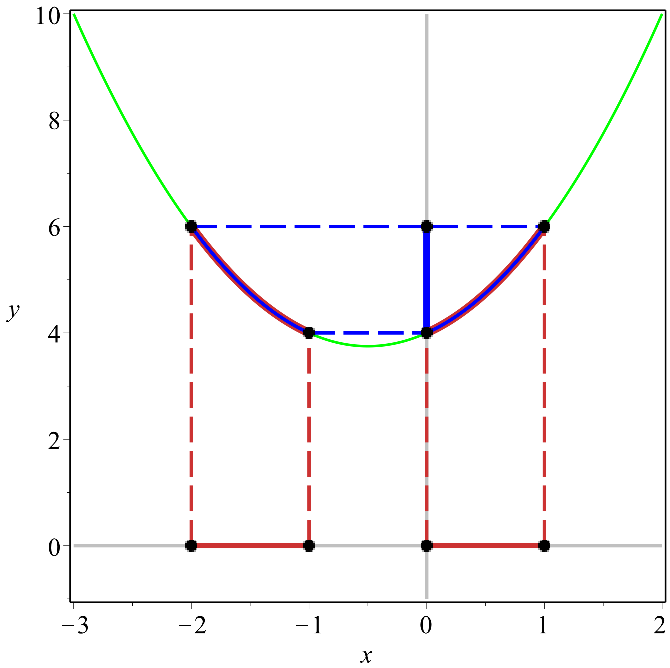
$$f(\tfrac{1}{2} + \xi_2) - f(\tfrac{1}{2} + \xi_1) \;=\; (\xi_2^2 + \tfrac{15}{4}) - (\xi_1^2 + \tfrac{15}{4}) > 0$$

$\Rightarrow$ f injektiv ✓ auf $[-\frac{1}{2}, \infty)$ (weil strikt monoton wachsend).

Daher: f nimmt nur positive Werte an, und der kleinste Funktionswert ist $f(-\frac{1}{2}) = \frac{15}{4}$.

---

c)



---

d) Wir lösen zwei quadratische Gleichungen:

$$f(x) = 4 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0$$
$$f(x) = 6 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}([4,6]) = [-2,-1] \cup [0,1]$$

(siehe Grafik).

a) [L] Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{13}{111}$ an.

b) [L] Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{126}$ unter Verwendung der geometrischen Summenformel in rationale Darstellung um.

---

a) Ganzzahlige Division mit Rest, allfällige Periode diagnostizieren:

```
  13       /   111 = 0.117...
---------
  130
 -111
---------
   190
  -111
---------
    790
   -777
---------
     13
```

$\Rightarrow$

$$\frac{13}{111} = 0.\overline{117}$$

---

b) Rechnung mittels geometrischer Summe.

Achte auf Periodenlänge (hier: 3 ohne 'Vorlauf')

$$\begin{aligned} 0.\overline{126} &= 0.126\,126\,126\,126\,\ldots = 0.126 + 0.000\,126 + \ldots \\ &= 0.126 \cdot \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \ldots\right) = \frac{126}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} \\ &= \frac{126}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{126}{999} = \frac{9 \cdot 14}{9 \cdot 111} = \frac{14}{111} \end{aligned}$$

a) [L] Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad \text{und} \quad a_{n+1} \; = \; a_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \quad n \geq 1$$

Geben Sie für a_n einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

b) [L] Gleiche Frage wir unter **a)**, für

$$a_0 = 2, \quad \text{und} \quad a_{n+1} \; = \; \frac{a_n}{1 - a_n}, \quad n \geq 0$$

Hinweis: Induktion.

---

a) Umformen:

$$a_{n+1} \; = \; a_n \frac{n}{n+1}$$

Also:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \cdot \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{usw.}$$

$\Rightarrow$ mit offensichtlichem Induktionsargument:

$$a_n \; = \; \frac{1}{n}$$

---

b) Rechnen:

$$a_1 = -\frac{2}{1}, \quad a_2 = -\frac{2}{3}, \quad a_3 = -\frac{2}{5}, \quad a_4 = -\frac{2}{7}, \quad \text{usw.}$$

$\rightsquigarrow$ Vermutung: $a_n = -\dfrac{2}{2n-1}$ für $n \geq 1$

Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $a_1 = -2$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} \; = \; \frac{a_n}{1 - a_n} \overset{\text{IND}}{=} \frac{-\frac{2}{2n-1}}{1 + \frac{2}{2n-1}} \; = \; - \frac{2}{2n - 1 + 2}$$

$$= \; - \frac{2}{2(n+1) - 1} \quad ✓$$

a) [L] Wir betrachten die harmonischen Summen

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Bestimmen Sie für vorgegebenes $k \in \mathbb{N}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{k\,n}}{H_n}$$

b) [L] Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n+n+\ldots+n}$$

c) [L] Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+a_n}{5\,n+6}$$

Hinweis: Einschließungsprinzip.

---

a) Umformen:

$$\frac{H_{k\,n}}{H_n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{k\,n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{k\,n}}{H_n}$$

mit

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{k\,n} < (k-1)\,n\,\frac{1}{n} = k-1 \quad \text{beschränkt}$$

$\Rightarrow$ wegen $H_n \to \infty$ für $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{k\,n}}{H_n} = 1$$

(Einschließungsprinzip).

b) Direkt ausrechnen:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n+n+\ldots+n} = \frac{\frac{n\,(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

c) Umformen:

$$\frac{n+a_n}{5\,n+6} = \underbrace{\frac{n}{5\,n+6}}_{\to\frac{1}{5}} + \underbrace{\frac{a_n}{5\,n+6}}_{\to 0} \to \frac{1}{5}$$

Hier wurde das Einschließungsprinzip verwendet:

Mit $|a_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Beschränktheit) gilt ja

$$\underbrace{-\frac{C}{5\,n+6}}_{\uparrow 0} \le \frac{a_n}{5\,n+6} \le \underbrace{\frac{C}{5\,n+6}}_{\downarrow 0}$$

a) [L] Gegeben sei die Folge (a_n), mit

$$a_n = \left(c + \frac{1}{n}\right)^n, \quad c > 0$$

Entscheiden Sie, für welche Werte des Parameters $c > 0$ die Folge konvergiert bzw. divergiert. Im Fall der Konvergenz geben Sie den Grenzwert an.

b) [L] Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = c > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{für } n \geq 1$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge positiv und strikt monoton wachsend ist.

(ii) Ist die Folge konvergent? Falls ja, geben Sie den Grenzwert an. Falls nein, erklären Sie, was für $n \to \infty$ passiert.

c) [L] Gegeben sei die Folge (a_n), mit

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Zeigen Sie, dass die Folge **monoton** (wachsend oder fallend?) und **beschränkt** ist. Ist sie konvergent oder divergent? Im Falle der Konvergenz geben Sie eine Einschließung für den Grenzwert an.

---

a) Fallunterscheidung:

- $c < 1$: Für hinreichend großes n gilt
  $$a_n \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent, mit} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$
  (Einschließungsprinzip).
- $c = 1$:
  $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent, mit} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = e$$
- $c > 1$:
  $$a_n > c^n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{bestimmt divergent gegen } +\infty$$

⟶

b) (i) Positivität und strikte Monotonie sind klar laut Konstruktion. Das ist eigentlich ein (sehr einfaches) Induktionsargument; wir schreiben es zur Übung an:

- Induktionsanfang $(n = 2)$:

$$a_2 = c + \frac{1}{c} > c = a_1 > 0 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} > a_n \overset{\text{IND}}{>} 0 \quad \checkmark$$

(ii) Angenommen, der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}_+$ existiert. $\Rightarrow$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = a + \frac{1}{a} \quad \ldots \text{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$.

---

c) Laut Konstruktion gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir vergleichen a_{n+1} mit a_n:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= a_n + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > a_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (a_n) ist strikt monoton wachsend.

Beschränktheit:

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Konvergenz.

$\Rightarrow$ (a_n) konvergent, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in (0, 1]$.

Die positive Folge (f_n) sei rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0,\; f_1 = 1, \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \;\; \text{für } n \geq 2$$

a) [L] Wir wollen für die f_n eine explizite Darstellung herleiten. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(i) Verwenden Sie den Ansatz $f_n = x^n$ und bestimmen Sie den Parameter x so, dass x^n der gegebenen Rekursion genügt. Sie finden zwei mögliche Lösungen x; nennen wir sie p und q, mit $p > q$.

(ii) Zeigen Sie, dass dann jede Linearkombination $c\,p^n + d\,q^n$ ebenfalls der gegebenen Rekursion genügt (dabei sind c und d beliebige Konstanten).

(iii) Welche Rolle spielen die gegebenen Anfangswerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$? Zeigen Sie

$$f_n \;=\; \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \geq 0$$

b) [L] Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \;=\; p$$

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - p\right)$.

Die Folge (f_n) heißt **Fibonacci-Folge.**

a) (i) Ansatz $f_n = x^n \;\rightsquigarrow$

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Leftrightarrow \quad x^n\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$

Nullstellen von $x^2 - x - 1$:

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, \qquad q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

$\Rightarrow \quad p^n$ und q^n genügen der gegebenen Rekursion.

(ii) Aus $p^n = p^{n-1} + p^{n-2}$ und $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ folgt

$$\begin{aligned} c\,p^n + d\,q^n \;&=\; c\left(p^{n-1} + p^{n-2}\right) + d\left(q^{n-1} + q^{n-2}\right) \\ &=\; \left(c\,p^{n-1} + d\,q^{n-1}\right) + \left(c\,p^{n-2} + d\,q^{n-2}\right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

⟶

(iii) Die Konstanten c und d werden durch die gegebenen Anfangswerte festgelegt: Aus

$$\begin{aligned} 0 &= f_0 = c + d \\ 1 &= f_1 = c\,p + d\,q \end{aligned}$$

folgt

$$c = \frac{1}{p-q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad d = -\frac{1}{p-q} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$

$$f_n = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}} \quad \checkmark$$

(Dies sieht etwas 'kurios' aus, da ja laut Angabe gilt $f_n \in \mathbb{N}$.)

---

b) Aus **a)** (iii):

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}}{f_n} - p &= \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p^n - q^n} - p = \frac{\cancel{p^{n+1}} - q^{n+1} - \cancel{p^{n+1}} + p\,q^n}{p^n - q^n} \\ &= q^n\,\frac{p-q}{p^n - q^n} = \cancel{q^n}\,\frac{p-q}{\cancel{q^n}\left(\underbrace{\left(\frac{p}{q}\right)^n}_{\to\infty} - 1\right)} \to 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$$

Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.

a) [L] Beweisen Sie: Falls (a_n) gegen einen Grenzwert $a > 0$ konvergiert, dann ist die Folge $(1/a_n)$ beschränkt.

b) [L] Ist die Folge $(1/a_n)$ konvergent?

---

a) Konvergenz von (a_n) gegen a bedeutet:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Wähle nun z.B. $\varepsilon = \frac{a}{2}$ $\rightsquigarrow$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \geq N : \quad |a_n - a| \, < \, \frac{a}{2} \tag{X}$$

$\rightsquigarrow$

- Für $a_n > a$ gilt auf jeden Fall $1/a_n < 1/a$.
- Für $a_n < a$ $(n \geq N)$ folgt aus (X): $a_n > \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow$

$$\forall\, n \geq N : \quad \frac{1}{a_n} \, < \, \frac{2}{a}$$

$\Rightarrow$ $(1/a_n)$ ist beschränkt. ✓

Anschauliche Interpretation: Die Folge (a_n) kann sich nicht beliebig nahe an 0 annähern.

---

b) Rechenregeln für konvergente Folgen $\Rightarrow$

$$(1/a_n) \;\text{ konvergiert gegen } 1/a. \quad ✓$$

Bzw. direkt argumentiert mit Hilfe von **a)**:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| \, = \, \left| \frac{a - a_n}{a\, a_n} \right| \leq \frac{2}{a^2} \, |a_n - a|$$

$\Rightarrow$ Konvergenz. ✓

Vorbemerkung: Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig** an der Stelle $x = \xi$, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \to \xi$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(\xi)$$

a) [L] Zeigen Sie: Die rekursiv definierte Folge (a_n), mit

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{für } n \geq 1$$

ist konvergent. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge monoton wachsend und durch $c > 0$ beschränkt ist. Versuchen Sie ein möglichst kleines c zu finden, für das dies zutrifft!

Um den Grenzwert zu bestimmen, verwenden Sie die Tatsache, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ stetig ist $(x \geq -1)$.

b) [L] Schreiben Sie einige Folgenglieder explizit an. Welche ‘Struktur’ ergibt sich für $n \to \infty$?

---

a) – Die Folge (a_n) ist (strikt) monoton wachsend. Beweis mittels vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang $(1 \mapsto 2)$:

$$a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss [1] $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{\text{IND}}{>} \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n \quad \checkmark$$

– Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq c$ mit einem $c \geq a_2 = \sqrt{2}$.

Wir lassen den Wert von c zunächst unbestimmt und überprüfen, wann der Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ funktioniert:

$$a_n \leq c \overset{?}{\Rightarrow} a_{n+1} \leq c$$
$$a_n \leq c \overset{?}{\Rightarrow} \sqrt{1+a_n} \leq c$$

Der Induktionsschluss funktioniert offenbar, falls

$$\sqrt{1+c} \leq c \quad \Leftrightarrow \quad 1+c \leq c^2$$

⟶

Man sieht leicht ein, dass das kleinste infrage kommende c gegeben ist durch die positive Lösung der quadratischen Gleichung $1+c=c^2$, also

$$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

– Monotonie + Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$.

– Bestimmung des Grenzwertes a: Es gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n},$$

wobei wegen der Stetigkeit von $\sqrt{1+x}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{1+a}$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert a ist die positive Lösung der ‘Fixpunktgleichung’

$$a = \sqrt{1+a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = c$$

b) Rechnen:

$$a_2 = \sqrt{2}$$

$$a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

$$a_{10} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}}}}}$$

$$\vdots$$

… eine sogenannte **Kettenwurzel**, konvergent gegen a für $n \to \infty$.

Folgen $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können mehrere Häufungspunkte haben. Den größten bzw. kleinsten Häufungspunkt bezeichnet man als **Limes superior** bzw. **Limes inferior**, und diese lassen sich in folgender Weise definieren:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \sup_{n\in N} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big)$$

a) [L] Gegeben sei die Folge

$$\left(999, 1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{4}, 0, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{1}{16}, -\tfrac{5}{6}, \dots\right)$$

d.h.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 3\ell - 2 \\ \frac{1}{2^{\ell-1}}, & n = 3\ell - 1 \\ -\frac{\ell}{\ell+1}, & n = 3\ell \end{cases}, \qquad \ell \in \mathbb{N} \quad (\text{Ausnahme: } a_1 = 999)$$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior.

b) [L] Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

c) [L] Geben Sie ein Beispiel an, für welches in **b)** ein 'echt kleiner' ($<$) auftritt.

---

a)
- Häufungspunkte (HP): $x = 0$ sowie $x = -1$
- Limes superior: $x = 0$, d.h., der größte HP

  Dies 'sieht man direkt'; bzw. gemäß der formalen Definition:

  $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big),$$

  wobei

  $$0 < \sup_{k\geq n} a_k \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \quad \checkmark$$

- Limes inferior: $x = -1$, d.h., der kleinste HP Dies 'sieht man direkt'; bzw. gemäß der formalen Definition:

  $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big),$$

  wobei

  $$\inf_{k\geq n} a_k = -1 \quad \text{für alle } n \in N \quad \checkmark$$

⟶

Die Folge ist nicht konvergent, aber zu jedem HP gibt es konvergente Teilfolgen, die gegen diesen HP konvergieren. (Dies gilt generell gemäß der Definition eines HP.)

Beachte: Der Wert $a_1 = 999$ ist irrelevant für die Bestimmung eines HP, ebenso wie ein (beliebig langer) endlicher Abschnitt am Beginn der Folge.

b) Wir gehen aus von

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geq n} (a_k + b_k)\Big)$$

Es gilt

$$a_k \leq \sup_{\ell\geq n} a_\ell \quad \text{für alle} \quad k \geq n,$$

$$b_k \leq \sup_{\ell\geq n} b_\ell \quad \text{für alle} \quad k \geq n$$

$\Rightarrow$

$$a_k + b_k \leq \sup_{\ell\geq n} a_\ell + \sup_{\ell\geq n} b_\ell \quad \text{für alle} \quad k \geq n$$

$\Rightarrow$

$$\sup_{k\geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$$

$\Rightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \checkmark$$

c) Beispiel:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 2$$