
Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl:

Email:

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Gesamtpunktzahl:

Note:

Matlab-Nachtest (90 Minuten)
VU Einführung ins Programmieren für TM

01. Oktober 2007

Aufgabenstellung. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit ihrer LU-Zerlegung $A = LU$, wobei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normalisierte untere Dreiecksmatrix und $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $\prod_{j=1}^n u_{jj} \neq 0$ seien, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ist nun die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ gesucht, so kann x in zwei Schritten berechnet werden:

- (1) Löse das Gleichungssystem $Ly = b$.
- (2) Löse das Gleichungssystem $Ux = y$.

Es gilt dann insgesamt $b = Ly = L(Ux) = Ax$, d.h. wir haben die gesuchte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ berechnet. In diesem Test sollen Sie im wesentlichen eine MATLAB-Funktion

```
x = solveLU(L,U,b)
```

schreiben, die (mittels geeigneter Schleifen) die Lösung von $Ax = b$ berechnet, wenn die Matrizen L und U sowie die rechte Seite b gegeben sind.

Achtung. Selbstverständlich dürfen der MATLAB-Backslash-Operator (bzw. `linsolve`) zur Lösung linearer Gleichungssysteme sowie die MATLAB-Funktion `inv` (bzw. A^{-1}) zur Berechnung der Inversen einer Matrix *nicht* verwendet werden.

Aufgabe 1. Gegeben sei eine normalisierte untere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen eindeutigen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ly = b$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `solveL`, die für gegebene L und b den Lösungsvektor y zurückliefert. Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Matrix-Vektor-Multiplikation, zunächst eine Formel für die Koeffizienten y_j her.

Erinnerung. Die Matrix-Vektor-Multiplikation $b := Ax \in \mathbb{R}^n$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$b_j := \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Herleitung einer Formel für y_j :

MATLAB-Code zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2. Gegeben sei eine obere Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $\prod_{j=1}^n u_{jj} \neq 0$ und eine rechte Seite $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen eindeutigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ux = y$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `solveU`, die für gegebene U und y den Lösungsvektor x zurückliefert. Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Matrix-Vektor-Multiplikation, zunächst eine Formel für die Koeffizienten x_j her.

Herleitung einer Formel für x_j :

MATLAB-Code zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3. Man schreibe die MATLAB-Funktion $x = \text{solveLU}(L,U,b)$, die, wie anfangs beschrieben, das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = LU$ in zwei Schritten löst — zunächst $Ly = b$, danach $Ux = y$. Man schreibe die Funktion so, dass kein zusätzlicher Speicher für x angelegt wird, sondern der Vektor b geeignet überschrieben wird. Insbesondere sollen die Funktionen aus Aufgabe 1 und 2 *nicht* einfach aufgerufen, sondern die Codes geeignet adaptiert werden, sodass sich *eine* Gesamtfunktion ergibt.

Herleitung:

MATLAB-Code zu Aufgabe 3: