Samuel Ferraz-Leite, Dirk Praetorius
Christoph Überhuber

Sommersemester 2008
04. Juni 2008

Übungen zur Vorlesung
Einführung in das Programmieren für TM

Serie 10

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur nächsten Übung vorzubereiten und werden dort abgeprüft. Die übrigen Aufgaben dienen nur Ihrer Übung und mir als zusätzliche Grundlage für den Prüfungsstoff in den schriftlichen Tests. Kopieren Sie bitte den Source-Code in ein Unterverzeichnis `serie10` Ihres Home-Verzeichnisses. Überprüfen Sie bitte vor der Übung, ob Ihre Source-Codes mit `matlab` auf der `cad.zserv.tuwien.ac.at` interpretiert werden können.

Aufgabe 91*. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := x_n + x_{n-1}$. Man schreibe eine rekursive Funktion `fibonacci`, die zu gegebenem Index n das Folgenglied x_n zurückgibt. Man schreibe weiters eine nicht rekursive Funktion `fibonacci2`, die dasselbe leistet, wobei die Berechnung aber über geeignete Schleifen realisiert wird. Zeigen Sie mithilfe von Laufzeitmessungen, dass die induktive Variante effizienter ist. Überlegen Sie, warum die induktive Implementierung über eine Zählschleife effizienter als die rekursive Implementierung ist?

Aufgabe 92*. Man schreibe eine Funktion `merge`, die zwei aufsteigend sortierte Felder $a \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^n$ so vereinigt, dass das resultierende Feld $c \in \mathbb{R}^{m+n}$ ebenfalls aufsteigend sortiert ist, z.B. soll $a = (1, 3, 3, 4, 7)$ und $b = (1, 2, 3, 8)$ als Ergebnis $c = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 7, 8)$ liefern.

Aufgabe 93*. Man schreibe eine rekursive Funktion `mergesort`, die ein Feld $c \in \mathbb{R}^n$ aufsteigend sortiert und das sortierte Feld zurückgibt. Dabei soll folgendermaßen vorgegangen werden:

- Hat c Länge ≤ 2, so wird das Feld c explizit sortiert.
- Hat c Länge > 2, halbiere man c in zwei Teilfelder a und b, rufe `mergesort` für a und b auf und vereinige die sortierten Teilfelder mittels `merge` aus Aufgabe 92.

Aufgabe 94*. Es sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit $\ell_{jj} \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Dann ist L invertierbar, und die Inverse lässt sich wie folgt rekursiv berechnen: Wir schreiben L in Block-Form

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ und $L_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, wobei $n = p + q$ gilt. Man beachte, dass L_{11} und L_{22} wieder untere Dreiecksmatrizen sind mit $\ell_{jj} \neq 0$. Üblicherweise wählt man $p = n/2$, falls n gerade ist, bzw. $p = (n-1)/2$, falls n ungerade ist. Offensichtlich wird die Inverse L^{-1} dann durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Man schreibe eine Funktion `invertL`, die die Inverse L^{-1} rekursiv berechnet. Sie können die Korrektheit Ihrer Funktion mit Hilfe der Matlab-Funktion `inv` überprüfen.

Aufgabe 95. Man schreibe eine rekursive Funktion `detlaplace`, die die Determinante $\det(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes berechnet. Sie können Ihre Funktion mit der Matlab-Funktion `det` verifizieren.

Aufgabe 96. Man schreibe eine (rekursive) Funktion `papierschnitt`, die alle Möglichkeiten visualisiert, wie ein Papierbogen der ganzzahligen Länge `laenge` in Papierbahnen der Länge 1 und 2 geschnitten werden kann. — D.h. man stelle eine natürliche Zahl $n =$ `laenge` auf alle möglichen Weisen als Summe $n = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j$ mit Summanden $\sigma_j \in \{1, 2\}$ dar. Dabei soll die Reihenfolge beachtet werden. Für `laenge=4` gibt es beispielsweise 5 Möglichkeiten:

- $4 = 2 + 2$
- $4 = 2 + 1 + 1$
- $4 = 1 + 2 + 1$
- $4 = 1 + 1 + 2$
- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

Aufgabe 97. Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a, b]$. Es gelte

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0.$$

Dann hat f eine Nullstelle x_0, die im Folgenden mittels Bisektion approximiert werden soll:
Man definiert $c := (a + b)/2$ als Intervallmittelpunkt. Aufgrund der Voraussetzung gilt

$$f(a) \cdot f(c) \leq 0 \quad \text{oder} \quad f(c) \cdot f(b) \leq 0.$$

Im Fall $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ ruft man den Bisektionsalgorithmus für das Intervall $[a, c]$ auf, anderenfalls für das Intervall $[c, b]$. Als Abbruchbedingung verwende man $|b - a| \leq \varepsilon$. Wegen $x_0 \in [a, b]$ ist dann beispielsweise c (oder auch a und b) eine Approximation der Nullstelle bis auf einen Fehler ε. Der Funktion `bisektion` werden also die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und ein Function-Handle f übergeben. Im Fall $f(a) \cdot f(b) > 0$ soll abgebrochen werden. Als Testfunktion verwende man $f(x) = x^2 + \exp(x) - 2$ auf $[0, \infty)$.

Aufgabe 98. Der einseitige Differenzenquotient aus Aufgabe 86 konvergiert lediglich mit Ordnung $\alpha = 1$. Beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel für $f \in C^3(\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - f'(x) = \mathcal{O}(h^2)$$

für den zentralen Differenzenquotienten.

Aufgabe 99. Schreiben Sie eine Funktion `diff2(f,x,h0,tau)`, die für $h_n := 2^{-n} h_0$ die Folge der zweiseitigen Differenzenquotienten

$$\Psi(h_n) := \frac{f(x + h_n) - f(x - h_n)}{2h_n}$$

aus Aufgabe 98 berechnet, bis gilt

$$|\Psi(h_n) - \Psi(h_{n+1})| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |\Psi(h_n)| \leq \tau, \\ \tau\, |\Psi(h_n)| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Funktion liefere in diesem Fall die vollständige Folge $(\Psi(h_0), \ldots, \Psi(h_n))$ der Iterierten zurück.

Aufgabe 100. Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 86 und 99 und illustrieren Sie die mathematischen Konvergenzaussagen mithilfe praktischer Beispiele. Schreiben Sie ein Skript, dass folgende Aufgaben erfüllt:

- Für eine Funktion $f \in C^3(\mathbb{R})$ sollen die Folgen der Differenzenquotienten berechnet werden.
- Es soll eine Tabelle der absoluten und relativen Fehler für beide Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll eine Tabelle der experimentellen Konvergenzordnungen beider Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll ein Konvergenzgraph erstellt werden, in dem beide Verfahren direkt miteinander verglichen werden. Fügen Sie eine Legende, Achsenbeschriftungen und eine Überschrift ein.

Konstruieren Sie anschließend eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}) \setminus C^3(\mathbb{R})$ und führen Sie das Skript mit dieser Funktion aus. Was kann man für die experimentelle Konvergenzordnung des zentralen Differenzenquotienten beobachten?