Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Aufgabe 2 (6 Punkte):
Aufgabe 3 (10 Punkte):
Aufgabe 4 (4 Punkte):
Aufgabe 5 (8 Punkte):

Gesamtpunktzahl:

Schriftlicher Nachtest zu Matlab (90 Minuten)
VU Einführung ins Programmieren für TM

02. März 2009

Aufgabenstellung. Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Eine Möglichkeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist das Gaußsche Eliminationsverfahren, das im Folgenden mit und ohne Pivot-Suche realisiert werden soll.

Erinnerung. Das Matrix-Vektor-Produkt $b := Ax \in \mathbb{R}^n$ ist komponentenweise durch

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

definiert.

Aufgabe 1 (2 Punkte). Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bzw. $a_{jk} = 0$ für $j > k$. Dann gilt $a_{jj} \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$, und zu gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ existiert ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$. Leiten Sie —in Form eines mathematischen Beweises— eine Formel her, um die Koeffizienten x_j zu berechnen. Schreiben Sie dazu das Matrix-Vektor-Produkt $b = Ax$ komponentenweise für b_j mit $j = 1, \dots, n$ als Summe hin und überlegen Sie sich, wie die spezielle Gestalt von A die Laufindizes der Summe vereinfacht.

Lösung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Schreiben Sie mittels geeigneter Schleifen eine Funktion `solveU`, die die hergeleitete Formal aus Aufgabe 1 realisiert und x berechnet.

Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Falls die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ keine obere Dreiecksmatrix ist, kann man A durch geeignete Eliminationsschritte auf obere Dreiecksgestalt bringen. Dies ist auch das Vorgehen, wenn man ein lineares Gleichungssystem händisch löst:

- Im ersten Eliminationsschritt zieht man geeignete Vielfache der ersten Zeile von den übrigen Zeilen ab und erhält dadurch eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- Im zweiten Eliminationsschritt zieht man nun geeignete Vielfache der zweiten Zeile von den übrigen Zeilen ab und erhält eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- Nach $n-1$ Eliminationsschritten erhält man also eine obere Dreiecksmatrix A.

Man beachte, dass auch die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ geeignet modifiziert werden muss. Das resultierende Gleichungssystem $Ax = b$ mit regulärer oberer Dreiecksmatrix kann dann mittels `solveU` aus Aufgabe 2 gelöst werden. Schreiben Sie eine Funktion `gauss`, die diesen Algorithmus realisiert und die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ eines Gleichungssystems $Ax = b$ abschließend mittels Aufruf von `solveU` berechnet. — Machen Sie sich das Vorgehen zunächst an einem selbstgewählten Beispiel mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ klar.

Betrachtung des Beispiels $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Schreiben Sie eine verbesserte Version der Funktion `gauss`, bei der Sie die Schleifen weitestgehend durch geeignete Matlab-Arithmetik ersetzen.

Lösung zu Aufgabe 4.

Aufgabe 5 (8 Punkte). Das Gaußsche Eliminationsverfahren scheitert, falls im k-ten Schritt $a_{kk} = 0$ gilt, auch wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x besitzt, so beispielsweise in den Fällen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 1 & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Deshalb kann man das Verfahren um eine sogenannte *Pivot-Suche* erweitern:

- Im k-ten Schritt wählt man aus $a_{kk}, \dots, a_{nk}$ das betragsgrößte Element a_{pk}.
- Dann vertauscht man die k-te und die p-te Zeile von A (und b).
- Schließlich führt man den Eliminationsschritt aus wie zuvor.

Schreiben Sie eine Funktion `gausspivot`, die dieses Vorgehen realisiert. Implementieren Sie die Funktion möglichst rechenökonomisch. Sofern möglich, vermeiden Sie insbesondere das unnötige Kopieren von Speicher.

Lösung zu Aufgabe 5.