Dirk Praetorius, Samuel Ferraz-Leite
Christoph Überhuber

Wintersemester 2008/09
18. Dezember 2008

Übungen zur Vorlesung
Einführung in das Programmieren für TM

Serie 9

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur nächsten Übung vorzubereiten und werden dort abgeprüft. Die übrigen Aufgaben dienen nur Ihrer Übung und mir als zusätzliche Grundlage für den Prüfungsstoff in den schriftlichen Tests. Kopieren Sie bitte den Source-Code in ein Unterverzeichnis `serie09` *Ihres Home-Verzeichnisses. Überprüfen Sie bitte vor der Übung, ob Ihre Source-Codes mit* `matlab` *auf der* `lva.student.tuwien.ac.at` *interpretiert werden können. In den folgenden Aufgaben sollen* **rekursive Funktionen** *sowie* **Bedingungsschleifen** *und* **Function-Handles** *geübt werden.*

Aufgabe 81*. Gegeben sei eine reguläre obere Dreiecksmatrix $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ in Blockform

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

mit $U_{11} \in \mathbb{K}^{n/2\times n/2}$ für n gerade und $U_{11} \in \mathbb{K}^{(n+1)/2\times(n+1)/2}$ für n ungerade. Überlegen Sie sich, dass dann U_{11} und U_{22} ebenfalls reguläre obere Dreiecksmatrizen sind. Insbesondere gilt dann

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

da Multiplikation dieser Matrix mit U auf die Einheitsmatrix führt. Folglich lässt sich U^{-1} wie folgt rekursiv berechnen, denn U_{11} und U_{22} haben dieselben Eigenschaften wie U:

- Berechne U_{11}^{-1}.
- Berechne U_{22}^{-1}.
- Berechne $-U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1}$.

Schreiben Sie eine rekursive Funktion `Uinv = blockinvU(U)`, die U^{-1} auf die genannte Weise berechnet. Der Backslashoperator und der Befehl `inv` dürfen nur zur Verifikation verwendet werden.

Aufgabe 82*. Man schreibe eine rekursive Funktion `binomial`, die den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ berechnet. Dazu verwende man das Additionstheorem $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Ferner schreibe man eine Funktion `binomial2`, die den Binomialkoeffizienten mittels $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ berechnet. Dazu ist eine rekursive Funktion `faktorielle` zu entwickeln, die zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die Faktorielle $n!$ berechnet.

Aufgabe 83*. Alternativ zum Bisektionsverfahren aus der Vorlesung kann eine Nullstelle von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch mit dem *Sekantenverfahren* berechnet werden. Dabei sind x_0 und x_1 gegebene Startwerte und man definiert induktiv x_{n+1} als Nullstelle der Geraden durch $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$, d.h.

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)\,\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Verifizieren Sie diese Folge, und schreiben Sie eine Funktion `sekante(f,x0,x1,tau)` die die Folge der Iterierten berechnet, bis entweder

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \le \tau$$

oder

$$|f(x_n)| \le \tau \quad \text{und} \quad |x_n - x_{n-1}| \le \begin{cases} \tau & \text{für } |x_n| \le \tau, \\ \tau|x_n| & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. In zweiten Fall werde $\widetilde{z} := x_n$ als Approximation der Nullstelle x_0 von f zurückgegeben. Im ersten Fall werde mit Fehlermeldung abgebrochen. — Neben x_n sollen zusätzlich die Folgen $(x_0, \dots, x_n)$ der Nullstellen und der dazugehörigen Funktionswerte zurückgegeben werden.

Aufgabe 84*. Eine weitere Variante zur Berechnung einer Nullstelle einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das *Newton-Verfahren.* Ausgehend von einem Startwert x_0 definiert man induktiv eine Folge (x_n) wie folgt: Zu gegebenem x_k sei x_{k+1} die Nullstelle der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_k, f(x_k))$, d.h. $x = x_{k+1}$ erfüllt $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$. Auflösen nach x zeigt

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Man realisiere das Newton-Verfahren in einer Funktion `newton(f,fprime,x0,tau)`, wobei die Iteration abgebrochen wird, falls entweder

$$|f'(x_n)| \le \tau$$

oder

$$|f(x_n)| \le \tau \quad \text{und} \quad |x_n - x_{n-1}| \le \begin{cases} \tau & \text{für } |x_n| \le \tau, \\ \tau |x_n| & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. In zweiten Fall werde $\widetilde{z} := x_n$ als Approximation der gesuchten Nullstelle zurückgegeben. Im ersten Fall werde mit Fehlermeldung abgebrochen. — Neben x_n sollen zusätzlich die Folgen $(x_0, \ldots, x_n)$ der Nullstellen und der dazugehörigen Funktionswerte zurückgegeben werden.

Aufgabe 85. Schreiben Sie eine Matlab-Prozedur `testsqrt`, die für gegebenes $x > 0$ und $\tau > 0$ die Wurzel $\sqrt{x}$ mittels der Funktionen aus Aufgabe 83–**??** approximiert, d.h. die positive Nullstelle z der Funktion $f(t) := t^2 - x$ numerisch berechnet. Die Prozedur gebe für alle drei Verfahren den relativen Fehler $|\sqrt{x} - z| / \sqrt{x}$ sowie die Anzahl der benötigten Iterationsschritte aus.

Aufgabe 86. Für $x > 0$ konvergiert die Folge

$$x_1 := \frac{1}{2}(1 + x), \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{x}{x_n}\Big) \quad \text{für } n \ge 1$$

gegen $\sqrt{x}$. Man schreibe eine Funktion `sqrt_`, die für gegebene $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ als Ergebnis das erste Folgenglied $y = x_n$ zurückgibt, für das gilt

$$\frac{|x_n - x_{n+1}|}{|x_n|} \le \varepsilon \quad \text{oder} \quad |x_n| \le \varepsilon.$$

Welcher Zusammenhang besteht mit dem Newton-Verfahren aus Aufgabe **??**?

Aufgabe 87. Für eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man die Ableitung $f'(x)$ in einem festen Punkt $x \in \mathbb{R}$ durch den einseitigen Differenzenquotienten

$$\Phi(h) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{für } h > 0$$

approximieren. Nach Taylor-Formel gilt für $f \in C^2(\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung $|f'(x) - \Phi(h)| = \mathcal{O}(h)$. Beweisen Sie diese Aussage mathematisch! Schreiben Sie eine Funktion `diff(f,x,h0,tau)`, die für $h_n := 2^{-n} h_0$ die Folge der $\Phi(h_n)$ berechnet, bis gilt

$$|\Phi(h_n) - \Phi(h_{n+1})| \le \begin{cases} \tau & \text{für } |\Phi(h_n)| \le \tau, \\ \tau\, |\Phi(h_n)| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Funktion liefere in diesem Fall $y = \Phi(h_n)$ zurück. — Ferner soll die vollständige Folge $(\Phi(h_0), \ldots, \Phi(h_n))$ der Iterierten zurückgegeben werden.

Aufgabe 88. Das Newton-Verfahren aus Aufgabe **??** benötigt neben der Funktion `f` auch eine Funktion `fprime`, die die Ableitung f' der Funktion f auswertet. Alternativ kann man $f'(x_k)$ durch den Differenzenquotienten $\Phi_h(x_k)$ ersetzen. Man realisiere dieses Vorgehen, z.B. für $h = \tau$. Man erweitere Aufgabe **??** um dieses Verfahren und vergleiche mit den anderen. Erlätern Sie den Zusammenhang zwischen dem Newton- und dem Sekantenverfahren.

Aufgabe 89. Man schreibe eine (rekursive) Funktion `papierschnitt`, die alle Möglichkeiten visualisiert, wie ein Papierbogen der ganzzahligen Länge `laenge` in Papierbahnen der Länge 1 und 2 geschnitten werden kann. — D.h. man stelle eine natürliche Zahl $n =$ `laenge` auf alle möglichen Weisen als Summe $n = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j$ mit Summanden $\sigma_j \in \{1, 2\}$ dar. Dabei soll die Reihenfolge beachtet werden. Für `laenge=4` gibt es beispielsweise 5 Möglichkeiten:

- $4 = 2 + 2$
- $4 = 2 + 1 + 1$
- $4 = 1 + 2 + 1$
- $4 = 1 + 1 + 2$
- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

Aufgabe 90. Die Quotientenfolge $(a_{n+1}/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zur Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \ge 2,$$

konvergiert gegen den goldenen Schnitt $(1 + \sqrt{5})/2$. Insbesondere konvergiert die Differenz

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

gegen Null. Man schreibe eine Funktion `cauchy`, die zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \le 1/k$ zurückgibt.