Dirk Praetorius, Samuel Ferraz-Leite
Christoph Überhuber

Wintersemester 2008/09
15. Jänner 2009

Übungen zur Vorlesung
Einführung in das Programmieren für TM

Serie 10

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur nächsten Übung vorzubereiten und werden dort abgeprüft. Die übrigen Aufgaben dienen nur Ihrer Übung und mir als zusätzliche Grundlage für den Prüfungsstoff in den schriftlichen Tests. Kopieren Sie bitte den Source-Code in ein Unterverzeichnis `serie09` *Ihres Home-Verzeichnisses. Überprüfen Sie bitte vor der Übung, ob Ihre Source-Codes mit* `matlab` *auf der* `lva.student.tuwien.ac.at` *interpretiert werden können.*

Aufgabe 91*. Zu gegebenen reellen Stützstellen $x_1 < \cdots < x_n$ und Funktionswerten $y_j \in \mathbb{R}$ garantiert die Lineare Algebra ein eindeutiges Polynom $p(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j t^{j-1}$ vom Grad $n-1$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Nun sei $t \in \mathbb{R}$ fixiert und $p(t)$ gesucht. Man kann $p(t)$ mit dem *Neville-Verfahren* berechnen, ohne zunächst den Koeffizientenvektor $a \in \mathbb{R}^n$ berechnen zu müssen: Dazu definiere man für $j, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und $j + m \leq n + 1$ die Werte

$$\begin{aligned} p_{j,1} &:= y_j, \\ p_{j,m} &:= \frac{(t - x_j) p_{j+1,m-1} - (t - x_{j+m-1}) p_{j,m-1}}{x_{j+m-1} - x_j}. \end{aligned}$$

Es gilt dann $p(t) = p_{1,n}$. Man schreibe eine Funktion `neville`, die den Auswertungspunkt $t \in \mathbb{R}$ sowie die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ übernimmt und $p(t)$ mittels Neville-Verfahren berechnet. Dazu berücksichtige man das folgende schematische Vorgehen

$$\begin{array}{ccccccccccccc} y_1 & = & p_{1,1} & \longrightarrow & p_{1,2} & \longrightarrow & p_{1,3} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & p_{1,n} & = & p(t) \\ & & & \nearrow & & \nearrow & & & & \nearrow & & & \\ y_2 & = & p_{2,1} & \longrightarrow & p_{2,2} & & & & & & & & \\ & & & \nearrow & & & & \nearrow & & & & & \\ y_3 & = & p_{3,1} & \longrightarrow & \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \nearrow & & & & & & & \\ y_{n-1} & = & p_{n-1,1} & \longrightarrow & p_{n-1,2} & & & & & & & & \\ & & & \nearrow & & & & & & & & & \\ y_n & = & p_{n,1} & & & & & & & & & & \end{array} \tag{1}$$

Der mathematische Beweis für diesen Algorithmus folgt in der Vorlesung zur Numerischen Mathematik. Zunächst schreibe man die Funktion so, dass die Matrix $(p_{j,m})_{j,m=1}^{n}$ vollständig aufgebaut wird. Sie können den Code testen, indem Sie für ein bekanntes Polynom p als Funktionswerte $y_j = p(x_j)$ wählen.

Aufgabe 92*. Man kann das Neville-Verfahren aus Aufgabe 91 so programmieren, dass zur Speicherung der Werte *keine* Matrix $(p_{j,m})_{j,m=1}^{n}$ aufgebaut wird, sondern die gegebenen y_j-Werte geeignet überschrieben werden. Dadurch wird kein weiterer Speicher benötigt. Man realisiere dieses Vorgehen in einer Funktion `neville2`.

Aufgabe 93*. Gegeben seien Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $I, A \in \mathbb{R}^N$ sowie $J \in \mathbb{R}^{n+1}$, die eine schwach besetzte $(m \times n)$-Matrix in CCS-Speicherung repräsentieren. Schreiben Sie eine Funktion `ccs2naive(I,J,A,m,n)`, die als Ergebnis die entssprechenden Vektoren bei naiver Speicherung zurückgibt.

Aufgabe 94*. Gegeben seien Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$ und 3 Vektoren $I, A \in \mathbb{R}^N$ und $J \in \mathbb{R}^{n+1}$, die eine schwachbesetzte $(m \times n)$-Matrix in CCS-Speicherung repräsentieren, sowie ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie mittels geeigneter (möglichst weniger) Schleifen eine Matrix-Vektor-Multiplikation `mvmsparse(I,J,A,m,n,x)`.

Aufgabe 95. Eine effiziente Implementierung des einseitigen Differenzenquotienten $\Phi(h)$ aus Aufgabe 87 verwendet die vorherigen Werte $\Phi(h_0), \dots, \Phi(h_n)$, indem man (theoretisch!) das Interpolationspolynom p_n vom

Grad n zu den Punkten $(h_j, \Phi(h_j))$ für $j = 0, \ldots, n$ betrachtet, d.h. $p_n(h) \approx \Phi(h)$, und dieses mit dem Neville-Verfahren bei $h = 0$ auswertet. Man bezeichnet dieses Vorgehen als *Richardson-Extrapolation des einseitigen Differenzenquotienten*. (Einen Konvergenzbeweis für dieses Verfahren sehen Sie in der Vorlesung zur Numerischen Mathematik.) Mit $h_n := 2^{-n} h_0$ betrachten wir die Folge der $y_n := p_n(0)$. Man schreibe eine Funktion `richardson`, die neben dem Funktionshandle einer Funktion f, den Auswertungspunkt x, die erste Schrittweite $h_0 > 0$ sowie die Toleranz $\tau > 0$ übernimmt und $y_{n+1} \approx f'(x)$ zurückliefert, sobald gilt

$$|y_n - y_{n+1}| \leq \begin{cases} \tau, & \text{falls } |y_{n+1}| \leq \tau, \\ \tau\,|y_{n+1}| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Verwenden Sie bei der Realisierung die Funktion `neville` aus Aufgabe 91.

Aufgabe 96. Bei der Richardson-Extrapolation des einseitigen Differenzenquotienten aus Aufgabe 95 kann man sich folgende Beobachtung zum Neville-Verfahren zu Nutze machen: Bei einer effizienten Implementierung des Neville-Verfahrens gemäß Aufgabe 92 überschreibt man den Vektor y durch die Diagonale $(p_{1,n}, p_{2,n-1}, \ldots, p_{n,1})$, und $p_{1,n}$ ist der gesuchte Wert. Fügt man nun einen weiteren Interpolationsknoten (x_{n+1}, y_{n+1}) hinzu, so muss man nicht noch einmal das vollständige Schema rechnen, sondern die „neue Diagonale“ $(p_{1,n+1}, p_{2,n}, \ldots, p_{n+1,1})$. Mit dieser Beobachtung muss man in jedem Schritt der Richardson-Extrapolation nur noch eine Schleife durchlaufen, nicht mehr zwei!

Aufgabe 97. Für einen stetigen Integranden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ berechnet man das Integral $I := \int_a^b f\,dx$ numerisch über geeignete Summen. Bei der *summierten Trapezregel* berechnet man für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $h := (b-a)/n$ zum Beispiel

$$I_n := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) + f(b)\Big). \tag{2}$$

Dies ist gerade das Integral über die stetige und stückweise affine Funktion p mit $p(a + jh) = f(a + jh)$. Man schreibe eine Funktion `trapezregel(f,a,b,tau)`, die die Folge der Approximationen I_n berechnet, bis gilt

$$|I_n - I_{n-1}| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |I_n| \leq \tau, \\ \tau\,|I_n| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

In diesem Fall gebe man die vollständige Folge $(I_1, \ldots, I_n)$ der Approximationen zurück. Man teste die numerische Integration am Beispiel $f(x) = \exp(x)$ auf dem Intervall $[0, 10]$ und gebe abhängig von n neben dem Fehler $|I - I_n|$ auch die experimentelle Konvergenzordnung tabellarisch aus.

Aufgabe 98. Der einseitige Differenzenquotient aus Aufgabe 87 konvergiert lediglich mit Ordnung $\alpha = 1$. Beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel für $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) = \mathcal{O}(h^2)$$

für den zentralen Differenzenquotienten.

Aufgabe 99. Schreiben Sie eine Funktion `diff2(f,x,h0,tau)`, die für $h_n := 2^{-n} h_0$ die Folge der zweiseitigen Differenzenquotienten

$$\Psi(h_n) := \frac{f(x + h_n) - f(x - h_n)}{2h_n}$$

aus Aufgabe 98 berechnet, bis gilt

$$|\Psi(h_n) - \Psi(h_{n+1})| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |\Psi(h_n)| \leq \tau, \\ \tau\,|\Psi(h_n)| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Funktion liefere in diesem Fall die vollständige Folge $(\Psi(h_0), \ldots, \Psi(h_n))$ der Iterierten zurück.

Aufgabe 100. Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 87 und 99 und illustrieren Sie die mathematischen Konvergenzaussagen mithilfe praktischer Beispiele. Schreiben Sie ein Skript, dass folgende Aufgaben erfüllt:

- Für eine Funtkion $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ sollen Folgen der Differenzenquotienten berechnet werden.
- Es soll eine Tabelle der absoluten und relativen Fehler für beide Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll eine Tabelle der experimentellen Konvergenzordnung beider Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll ein Konvergenzgraph erstellt werden, in dem beide beide Verfahren direkt miteinander verglichen werden. Fügen Sie eine Legende, Achsenbeschriftungen und eine Überschrift ein.

Konstruieren Sie anschließend eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ und führen Sie das Skript mit dieser Funktion aus. Was kann man für die experimentelle Konvergenzordnung des zentralen Differenzenquotienten beobachten?