Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (10 Punkte):
Aufgabe 2 (8 Punkte):
Aufgabe 3 (8 Punkte):
Aufgabe 4 (4 Punkte):

Gesamtpunktzahl:

Schriftlicher Test 1 (90 Minuten)
VU Einführung ins Programmieren für TM

21. Jänner 2009

Aufgabenstellung. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit ihrer normalisierten LU-Zerlegung $A = LU$, wobei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normalisierte untere Dreiecksmatrix und $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $\prod_{j=1}^{n} u_{jj} \neq 0$ seien, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ist nun die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ gesucht, so kann x in zwei Schritten berechnet werden:

(1) Löse das Gleichungssystem $Ly = b$.

(2) Löse das Gleichungssystem $Ux = y$.

Es gilt dann insgesamt $b = Ly = L(Ux) = Ax$, d.h. wir haben die gesuchte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ berechnet. In diesem Test sollen Sie MATLAB-Funktionen

- `[L,U] = computeLU(A)`
- `y = solveL(L,b)`
- `x = solveU(U,y)`

schreiben.

Achtung. Selbstverständlich dürfen der MATLAB-Backslash-Operator (bzw. `linsolve`) zur Lösung linearer Gleichungssysteme sowie die MATLAB-Funktion `inv` (bzw. `A^-1`) zur Berechnung der Inversen einer Matrix *nicht* verwendet werden.

Aufgabe 1 (10 Punkte). Nicht jede reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt eine normalisierte LU-Zerlegung. Wenn aber $A = LU$ eine normalisierte LU-Zerlegung ist, so gilt

$$\begin{aligned}
u_{ik} &= a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} u_{jk} \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad k = i, \dots, n, \\
\ell_{ki} &= \frac{1}{u_{ii}} \Big(a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{kj} u_{ji} \Big) \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad k = i+1, \dots, n, \\
\ell_{ii} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

wie man leicht über die Formel für die Matrix-Matrix-Multiplikation zeigen kann. Alle übrigen Einträge von $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Null. Man schreibe eine Funktion `computeLU`, die die normalisierte LU-Zerlegung von A berechnet und zurückgibt. Dazu überlege man, in welcher Reihenfolge man die Einträge von L und U berechnen muss, damit die angegebenen Formeln wohldefiniert sind (d.h. alles was benötigt wird, ist bereits zuvor berechnet worden).

Lösung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Gegeben sei eine normalisierte untere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen eindeutigen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ly = b$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `solveL`, die für gegebene L und b den Lösungsvektor y zurückliefert. Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Matrix-Vektor-Multiplikation, zunächst eine Formel für die Koeffizienten y_j her.

Erinnerung. Die Matrix-Vektor-Multiplikation $b := Ax \in \mathbb{R}^n$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$b_j := \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Herleitung einer Formel für y_j:

Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Gegeben sei eine obere Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $\prod_{j=1}^n u_{jj} \neq 0$ und eine rechte Seite $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen eindeutigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ux = y$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `solveU`, die für gegebene U und y den Lösungsvektor x zurückliefert. Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Matrix-Vektor-Multiplikation, zunächst eine Formel für die Koeffizienten x_j her.

Herleitung einer Formel für x_j:

Lösung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Schreiben Sie die Funktion `computeLU` aus Aufgabe 1 unter Verwendung der Matlab-Arithmetik, d.h. eliminieren Sie (soweit möglich) die Schleifen durch Vektorarithmetik.

Lösung zu Aufgabe 4.