Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Aufgabe 2 (5 Punkte):
Aufgabe 3 (10 Punkte):
Aufgabe 4 (10 Punkte):

Gesamtpunktzahl:

Schriftlicher Test zu Matlab (90 Minuten)
VU Einführung ins Programmieren für TM

24. Juni 2010

Summierte Trapezregel. Für einen stetigen Integranden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ berechnet man das Integral $I := \int_a^b f\,dx$ numerisch über geeignete Summen. Bei der summierten Trapezregel berechnet man für gegebenes $N \in \mathbb{N}$ und $h := (b - a)/N$

$$I_N := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b)\Big).$$

Es gilt dann im Limes

$$I_\infty := \lim_{N\to\infty} I_N = \int_a^b f\,dx.$$

In diesem Test sollen Sie Matlab-Funktionen schreiben, die mit verschiedenen Abbruchkriterien und (im Wesentlichen) unter Verwendung von Matlab-Vektorarithmetik das Integral I_∞ approximieren.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{I} = \texttt{quadrature}(\texttt{f}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{N})$$

die für ein gegebenes Function-Handle `f`, Integrationsgrenzen $a < b \in \mathbb{R}$ und eine Ordnung $N \in \mathbb{N}$ die summierte Trapezregel

$$I_N := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b)\Big), \quad \text{mit} \quad h := (b-a)/N$$

mittels geeigneter Schleifen berechnet und zurückgibt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Schreiben Sie einen MATLAB-Code für

$$\texttt{I} = \texttt{quadrature}(\texttt{f}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{N})$$

der die summierte Trapezregel

$$I_N := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh) + f(b)\Big), \quad \text{mit} \quad h := (b-a)/N$$

realisiert, wobei *alle* auftretenden Schleifen durch **MATLAB-Vektorarithmetik** eliminiert werden. Gehen Sie davon aus, dass die Implementierung (d.h. das Function-Handle) `f` der Funktion f einen Vektor `x` übernimmt und als Ergebnis die Funktionswerte als Vektor `y` gleicher Dimension zurückgibt, d.h. $y_j = f(x_j)$ lässt sich simultan berechnen.

Erinnerung. Für gegebene $N \in \mathbb{N}$ und $h := (b-a)/N$ definiert

$$I_N := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh) + f(b)\Big).$$

die summierte Trapezregel.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Man schreibe eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{I} = \texttt{integrate}(\texttt{f}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{eps})$$

die für $N = 2^n$ und $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ eine Approximation $I = I_{2N} \approx \int_a^b f\,dx$ zurückliefert. Dabei soll $N = 2^n$ minimal sein mit der Eigenschaft

$$|I_{2N} - I_N| \le \texttt{eps} \cdot \max\{|I_{2N}|, |I_N|\}.$$

Ferner sollen folgende Anforderungen berücksichtigt werden:

- Gehen Sie davon aus, dass die Implementierung `f` der Funktion f einen Vektor `x` übernimmt und als Ergebnis die Funktionswerte als Vektor `fx` gleicher Dimension zurückgibt.
- Beachten Sie, dass alle Auswertungen von f zur Berechnung von I_N auch zur Berechnung von I_{2N} benötigt werden. Schreiben Sie die Funktion möglichst rechenökonomisch, d.h. vermeiden Sie unnötige Funktionswertungen von f. Insbesondere soll *nicht* die Funktion `quadrature` verwendet werden.
- Schreiben Sie die Funktion ferner möglichst speicherökonomisch, d.h. vermeiden Sie —soweit als möglich— die Speicherung der berechneten Werte I_N sowie das Anlegen von Hilfsspeicher.

Aitken'sches $\mathbf{\Delta^2}$-Verfahren. Das Δ^2-Verfahren ist ein Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung von Folgen. Für eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x = \lim_n x_n$ definiert man

$$y_n := x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

Unter gewissen Voraussetzungen an die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x - y_n}{x - x_n} = 0,$$

d.h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schneller gegen x als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{I} = \texttt{aitken}(\texttt{f}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{eps})$$

wobei Sie das Δ^2-Verfahren auf die Folge

$$x_n := I_N = \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b)\Big)$$

mit $N = 2^n$ und $h := (b-a)/N$ anwenden. Berechnen Sie die Folgenglieder y_n der Δ^2-Folge, bis erstmalig

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \texttt{eps} \cdot \max\{|y_n|, |y_{n+1}|\}.$$

gilt. In diesem Fall werde $I := y_{n+1} \approx \int_a^b f\,dx$ zurückgegeben. Ferner sollen folgende Anforderungen berücksichtigt werden:

- Gehen Sie davon aus, dass die Implementierung `f` der Funktion f einen Vektor `x` übernimmt und als Ergebnis die Funktionswerte als Vektor `fx` gleicher Dimension zurückgibt.
- Schreiben Sie die Funktion möglichst rechenökonomisch, d.h. vermeiden Sie unnötige Funktionswertungen von f (also `quadrature` *nicht* verwenden!)
- Schreiben Sie die Funktion möglichst speicherökonomisch, d.h. speichern Sie *nicht* die gesamten Vektoren x_n und y_n, sondern lediglich die benötigten Folgenglieder.