Dirk Praetorius, Samuel Ferraz-Leite
Christoph Überhuber

Sommersemester 2010
09. Juni 2010

Übungen zur Vorlesung
Einführung in das Programmieren für TM

Serie 11

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie die Source-Codes vor der Übung auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` und überprüfen Sie, ob diese von `matlab` auf der `lva.student.tuwien.ac.at` interpretiert werden können.

Aufgabe 11.1*. Gegeben seien Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $I, A \in \mathbb{R}^N$ sowie $J \in \mathbb{R}^{n+1}$, die eine schwach besetzte $(m \times n)$-Matrix in CCS-Speicherung repräsentieren. Schreiben Sie eine Funktion `ccs2naive(I,J,A,m,n)`, die als Ergebnis die entsprechenden Vektoren bei naiver Speicherung zurückgibt. Speichern Sie den Source-Code im Verzeichnis `serie11` unter dem Namen `ccs2naive.m`.

Aufgabe 11.2*. Für eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man die Ableitung $f'(x)$ in einem festen Punkt $x \in \mathbb{R}$ durch den einseitigen Differenzenquotienten

$$\Phi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für } h > 0$$

approximieren. Nach Taylor-Formel gilt für $f \in C^2(\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung $|f'(x) - \Phi(h)| = \mathcal{O}(h)$. Beweisen Sie diese Aussage mathematisch! Schreiben Sie eine Funktion `diff(f,x,h0,tau)`, die für $h_n := 2^{-n} h_0$ die Folge der $\Phi(h_n)$ berechnet, bis gilt

$$|\Phi(h_n) - \Phi(h_{n+1})| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |\Phi(h_n)| \leq \tau, \\ \tau\,|\Phi(h_n)| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Funktion liefere $y = \Phi(h_n)$ zurück. Speichern Sie den Source-Code im Verzeichnis `serie11` unter dem Namen `diff.m`. — Alternativ soll die vollständige Folge $(\Phi(h_0), \dots, \Phi(h_n))$ der Iterierten zurückgegeben werden.

Aufgabe 11.3*. Eine effiziente Implementierung des einseitigen Differenzenquotienten $\Phi(h)$ aus Aufgabe 11.2 verwendet die vorherigen Werte $\Phi(h_0), \dots, \Phi(h_n)$, indem man (theoretisch!) das Interpolationspolynom p_n vom Grad $n-1$ zu den Punkten $(h_j, \Phi(h_j))$ für $j = 1, \dots, n$ betrachtet, d.h. $p_n(h) \approx \Phi(h)$, und dieses mit dem Neville-Verfahren bei $h = 0$ auswertet. Man bezeichnet dieses Vorgehen als *Richardson-Extrapolation des einseitigen Differenzenquotienten.* (Einen Konvergenzbeweis für dieses Verfahren sehen Sie in der Vorlesung zur Numerischen Mathematik.) Mit $h_n := 2^{-n} h_0$ betrachten wir die Folge der $y_n := p_n(0)$. Man schreibe eine Funktion `richardson`, die neben dem Funktionshandle einer Funktion f, den Auswertungspunkt x, die erste Schrittweite $h_0 > 0$ sowie die Toleranz $\tau > 0$ übernimmt und $y_{n+1} \approx f'(x)$ zurückliefert, sobald gilt

$$|y_n - y_{n+1}| \leq \begin{cases} \tau, & \text{falls } |y_{n+1}| \leq \tau, \\ \tau\,|y_{n+1}| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Verwenden Sie bei der Realisierung die Funktion `neville` aus Aufgabe 10.1. Speichern Sie den Source-Code im Verzeichnis `serie11` unter dem Namen `richardson.m`.

Aufgabe 11.4*. Vergleichen Sie die Konvergenz des einseitigen Differenzenquotienten aus Aufgabe 11.2 mit der Konvergenz der durch Richardson-Extrapolation gemäß Aufgabe 11.3 berechneten Approximationen an $f'(x)$. Schreiben Sie dazu ein Skript, dass folgende Aufgaben erfüllt:

- Für eine Funtkion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sollen Folgen der Differenzenquotienten mit und ohne Extrapolation berechnet werden.
- Es soll eine Tabelle der absoluten Fehler $|\Phi(h) - f'(x)|$ bzw. und relativen Fehler $|\Phi(h) - f'(x)|/|f'(x)|$ für beide Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll ein (doppelt logarithmischer) Konvergenzgraph erstellt werden, in dem beide beide Verfahren direkt miteinander verglichen werden. Fügen Sie eine Legende, Achsenbeschriftungen und eine Überschrift ein.

Aufgabe 11.5. Gegeben seien Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$ und 3 Vektoren $I, A \in \mathbb{R}^N$ und $J \in \mathbb{R}^{n+1}$, die eine schwachbesetzte $(m \times n)$-Matrix in CCS-Speicherung repräsentieren, sowie ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie mittels geeigneter (möglichst weniger) Schleifen eine Matrix-Vektor-Multiplikation `mvmsparse(I,J,A,m,n,x)`.

Aufgabe 11.6. Gegeben seien Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$ und 3 Vektoren $I, J, A \in \mathbb{R}^N$ mit $N \leq mn$, die eine schwachbesetzte Matrix in naiver Speicherung repräsentieren. Schreiben Sie eine Funktion `naive2ccs(I,J,A,m,n)`, die als Ergebnis die entsprechenden Vektoren des CCS-Formats zurückliefert.

Aufgabe 11.7. Alternativ zum Bisektionsverfahren aus der Vorlesung kann man zur Berechnung einer Nullstelle einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ das *Newton-Verfahren* verwenden. Ausgehend von einem Startwert x_0 definiert man induktiv eine Folge (x_n) wie folgt: Zu gegebenem x_k sei x_{k+1} die Nullstelle der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_k, f(x_k))$, d.h. $x = x_{k+1}$ erfüllt $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$. Auflösen nach x zeigt

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Realisieren Sie das Newton-Verfahren in einer Funktion `newton(f,fprime,x0,tau)`, wobei die Iteration abgebrochen wird, falls entweder

$$|f'(x_n)| \leq \tau$$

oder

$$|f(x_n)| \leq \tau \quad \text{und} \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |x_n| \leq \tau, \\ \tau|x_n| & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. In jedem Fall werde $\widetilde{z} := x_n$ als Approximation der gesuchten Nullstelle zurückgegeben, wobei im ersten Fall zusätzlich eine Warnung ausgegeben werden soll. — Neben x_n sollen die Folgen $(x_0, \ldots, x_n)$ der Nullstellen und der dazugehörigen Funktionswerte zurückgegeben werden. Testen Sie Ihre Implementierung mit der Funktion $f(x) = x^2 + e^x - 2$.

Aufgabe 11.8. Für $x > 0$ konvergiert die Folge

$$x_1 := \frac{1}{2}(1 + x), \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{x}{x_n}\Big) \quad \text{für } n \geq 1$$

gegen $\sqrt{x}$. Schreiben Sie eine Funktion `sqrt_`, die für gegebene $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ als Ergebnis das erste Folgenglied $y = x_n$ zurückgibt, für das gilt

$$\frac{|x_n - x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \varepsilon \quad \text{oder} \quad |x_n| \leq \varepsilon.$$

Welcher Zusammenhang besteht mit dem Newton-Verfahren aus Aufgabe 11.7?

Aufgabe 11.9. Das Newton-Verfahren aus Aufgabe 11.7 benötigt neben der Funktion `f` auch eine Funktion `fprime`, die die Ableitung f' der Funktion f auswertet. Alternativ kann man $f'(x_k)$ durch den Differenzenquotienten $\Phi_h(x_k)$ aus Aufgabe 11.2 ersetzen. Realisieren Sie dieses Vorgehen indem Sie eine Funktion `newton(f,x0,h0,tau)` schreiben, die zur Approximation der Abeitung $f'(x_k)$ das Ergebnis von `diff(f,xk,h0,tau)` verwendet.

Aufgabe 11.10. Für einen stetigen Integranden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ berechnet man das Integral $I := \int_a^b f\,dx$ numerisch über geeignete Summen. Bei der *summierten Trapezregel* berechnet man für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $h := (b - a)/n$ zum Beispiel

$$I_n := \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) + f(b)\Big). \tag{1}$$

Dies ist gerade das Integral über die stetige und stückweise affine Funktion p mit $p(a + jh) = f(a + jh)$. Man schreibe eine Funktion `trapezregel(f,a,b,tau)`, die die Folge der Approximationen I_n berechnet, bis gilt

$$|I_n - I_{n-1}| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |I_n| \leq \tau, \\ \tau\,|I_n| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

In diesem Fall gebe man die vollständige Folge $(I_1, \ldots, I_n)$ der Approximationen zurück. Man teste die numerische Integration am Beispiel $f(x) = \exp(x)$ auf dem Intervall $[0, 10]$ und gebe abhängig von n neben dem Fehler $|I - I_n|$ auch die experimentelle Konvergenzordnung tabellarisch aus.