Dirk Praetorius, Samuel Ferraz-Leite
Christoph Überhuber

Sommersemester 2010
15. Juni 2010

Übungen zur Vorlesung Einführung in das Programmieren für TM

Serie 12

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie die Source-Codes vor der Übung auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` und überprüfen Sie, ob diese von `matlab` auf der `lva.student.tuwien.ac.at` interpretiert werden können.

Aufgabe 12.1*. Der einseitige Differenzenquotient aus Aufgabe 11.2 konvergiert lediglich mit Ordnung $\alpha = 1$. Beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel für $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) = \mathcal{O}(h^2)$$

für den zentralen Differenzenquotienten.

Aufgabe 12.2*. Schreiben Sie eine Funktion `diff2(f,x,h0,tau)`, die für $h_n := 2^{-n} h_0$ die Folge der zentralen Differenzenquotienten

$$\Psi(h_n) := \frac{f(x+h_n) - f(x-h_n)}{2h_n}$$

aus Aufgabe 12.1 berechnet, bis gilt

$$|\Psi(h_n) - \Psi(h_{n+1})| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |\Psi(h_n)| \leq \tau, \\ \tau\,|\Psi(h_n)| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Funktion liefere in diesem Fall die vollständige Folge $(\Psi(h_0), \dots, \Psi(h_n))$ der Iterierten zurück. Speichern Sie den Source-Code im Verzeichnis `serie12` unter dem Namen `diff2.m`.

Aufgabe 12.3*. Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 11.2 und 12.2 und illustrieren Sie die mathematischen Konvergenzaussagen mithilfe praktischer Beispiele. Schreiben Sie ein Skript, dass folgende Aufgaben erfüllt:

- Für eine Funtkion $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ sollen Folgen der Differenzenquotienten berechnet werden.
- Es soll eine Tabelle der absoluten und relativen Fehler für beide Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll eine Tabelle der experimentellen Konvergenzordnung beider Verfahren ausgegeben werden.
- Es soll ein Konvergenzgraph erstellt werden, in dem beide beide Verfahren direkt miteinander verglichen werden. Fügen Sie eine Legende, Achsenbeschriftungen und eine Überschrift ein.

Konstruieren Sie anschließend Funktionen $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Führen Sie das Skript mit diesen Funktionen aus. Was kann man für die experimentelle Konvergenzordnung des zentralen Differenzenquotienten beobachten? Speichern Sie den Source-Code im Verzeichnis `serie12` unter dem Namen `compareDiff.m`.

Aufgabe 12.4*. Schreiben Sie eine Funktion `plotPotential(f)`, die en Plot eines Potentials $f = f(x,y)$ als farbige Projektion auf die Ebene erstellt. Zeichnen Sie 9 Konturlinien in den Plot. Geben Sie unter den Plot eine horizontale `colorbar`. Testen Sie Ihre Funktion mit dem Potential $f(x,y) = x \cdot e^{-x^2-y^2}$. Speichern Sie den Source-Code unter dem Namen `plotPotential.m` und das entstandene Bild als farbige Post-Script-Datei unter `potential.eps` im Verzeichnis `serie12`.

Aufgabe 12.5. Modifizieren Sie Aufgabe 11.3, um den zentralen Differenzenquotienten zu extrapolieren, indem Sie (theoretisch!) das Interpolationspolynom p_n vom Grad $n-1$ zu den Punkten $(h_j^2, \Psi(h_j))$ für $j = 1, \dots, n$ betrachten, d.h. $p_n(h^2) \approx \Psi(h)$, und dieses mit dem Neville-Verfahren bei $h = 0$ auswertet. Schreiben Sie ein Skript, dass die experimentelle Konvergenzreate für den zentralen Differenzenquotienten und die Richardson-Extrapolation des zentralen Differenzenquotienten plottet.

Aufgabe 12.6. Das Δ^2-Verfahren von Aitkin ist ein Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung von Folgen. Für eine injektive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = x$ definiert man

$$y_n := x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - x}{x_n - x} = 0,$$

d.h. die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schneller gegen x als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man schreibe eine Funktion `aitkin`, die für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit Länge $n \geq 3$ den Vektor $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ berechnet.

Aufgabe 12.7. Man kombiniere das Aitkin-Verfahren aus Aufgabe 12.6 mit dem einseitigen Differenzenquotienten $\Phi(h)$ aus Aufgabe 11.2: Mit $h_n := 2^{-n}h_0$ betrachten wir die Folge der $x_n := \Phi(h_n)$ und erhalten daraus die Folge (y_n). Man schreibe eine Funktion `diffaitkin`, die neben dem Funktionspointer einer Funktion f, den Auswertungspunkt x, die Schrittweite $h_0 > 0$ sowie die Toleranz $\tau > 0$ übernimmt und $y_{n+1} \approx f'(x)$ zurückliefert, sobald gilt

$$|y_n - y_{n+1}| \leq \begin{cases} \tau, & \text{falls } |y_{n+1}| \leq \tau, \\ \tau\,|y_{n+1}|, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

In jedem Schritt gebe man h, $|y_{n+1} - y_n|$ sowie y_{n+1} aus. Als Beispiel betrachte man die Berechnung von $e = \exp(1) = \exp'(1)$ und $\varepsilon = 10^{-12}$. Man vergleiche die Anzahl der Iterationen mit und ohne (d.h. $y_n = x_n$) Aitkin-Verfahren.

Aufgabe 12.8. Schreiben Sie den Mergesort-Algorithmus aus Aufgabe 7.3–7.4 als Matlab-Funktion `mergesort`. Erzeugen Sie weiters mittels der MEX-Schnittstelle eine Matlab-Funktion `mxMergesort`, die den C-Code aus Aufgabe 7.3–7.4 verwendet. Visualisieren Sie in einem doppellogarithmischen Plot die Laufzeiten der Matlab-Implementierung und der C-MEX-Implementierung für Felder der Längen $N = 100 \cdot 2^n$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$. Fügen Sie zum Verleich Steigungsgraden mit Steigung $\mathcal{O}(N)$ und $\mathcal{O}(N \log N)$ in den Plot ein.

Aufgabe 12.9. Für einen stetigen Integranden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ berechnet man das Integral $I := \int_a^b f\,dx$ numerisch über geeignete Summen. Bei der *summierten Rechteckregel* berechnet man für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $h := (b - a)/n$ zum Beispiel

$$I_n := h \sum_{j=1}^{n} f(a + jh). \tag{1}$$

Schreiben Sie eine Funktion `rechteckregel(f,a,b,tau)`, die die Folge der Approximationen I_n berechnet, bis gilt

$$|I_n - I_{n-1}| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |I_n| \leq \tau, \\ \tau\,|I_n| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

In diesem Fall gebe man die vollständige Folge $(I_1, \ldots, I_n)$ der Approximationen zurück. Man teste die numerische Integration am Beispiel $f(x) = \exp(x)$ auf dem Intervall $[0, 10]$ und gebe abhängig von n den Fehler $|I - I_n|$ tabellarisch aus.

Aufgabe 12.10. Ein weiteres Verfahren zur Nullstellensuche ist das *Sekantenverfahren.* Dabei sind x_0 und x_1 gegebene Startwerte und man definiert induktiv x_{n+1} als Nullstelle der Geraden durch $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$, d.h.

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)\,\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Verifizieren Sie diese Folge, und schreiben Sie eine Funktion `sekante(f,x0,x1,tau)` die die Folge der Iterierten berechnet, bis entweder

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \tau$$

oder

$$|f(x_n)| \leq \tau \quad \text{und} \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \begin{cases} \tau & \text{für } |x_n| \leq \tau, \\ \tau|x_n| & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. In zweiten Fall werde $\widetilde{z} := x_n$ als Approximation der Nullstelle x_0 von f zurückgegeben. Im ersten Fall werde mit Fehlermeldung abgebrochen. — Neben x_n sollen zusätzlich die Folgen $(x_0, \ldots, x_n)$ der Nullstellen und der dazugehörigen Funktionswerte zurückgegeben werden.