Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (3 Punkte):
Aufgabe 2 (3 Punkte):
Aufgabe 3 (2 Punkte):
Aufgabe 4 (5 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (1 Punkte):
Aufgabe 7 (2 Punkte):
Aufgabe 8 (4 Punkte):
Aufgabe 9 (1 Punkte):
Aufgabe 10 (4 Punkte):
Aufgabe 11 (3 Punkte):
Aufgabe 12 (3 Punkte):
Aufgabe 13 (6 Punkte):

Gesamtpunktzahl:

Schriftlicher Test (120 Minuten)
VU Einführung ins Programmieren für TM

01. März 2015

Aufgabe 1 (3 Punkte). Was sind die Bestandteile M, $e_{\min}$, $e_{\max}$ des Gleitkommazahlsystems $\mathbb{F}(2, M, e_{\min}, e_{\max})$? Wie lässt sich jede Gleitkommazahl $x \in \mathbb{F}(2, M, e_{\min}, e_{\max})$ darstellen? Welchen Wert haben die größte und die kleinste positive normalisierte Gleitkommazahl im `double`-Gleitkommazahlsystem $\mathbb{F}(2, 53, -1021, 1024)$?

Lösung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Was ist der Output des folgenden Programms?

```cpp
#include <stdio.h>

int z = 10;

void fct(int& x, int& y, int& z);

int main() {
  int x = 20;
  int y = 30;

  printf("(1) %d,%d,%d\n",x,y,z);
  {
    int x = 100;
    y = 3;
    fct(x,y,z);
    printf("(2) %d,%d,%d\n",x,y,z);
    x = 1;
    printf("(3) %d,%d,%d\n",x,y,z);
  }
  printf("(4) %d,%d,%d\n",x,y,z);
  return 0;
}

void fct(int& x, int& y, int& z) {
  printf("(5) %d,%d,%d\n",x,y,z);
  if(x >= y) {
    z = x;
  }
  else {
    z = y;
  }
  printf("(6) %d,%d,%d\n",x,y,z);
  y = 40;
}
```

Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Eine untere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Matrix mit der Eigenschaft $A_{jk} = 0$ für $k > j$. Für $n = 5$ hat A beispielsweise die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}.$$

Zur effizienten Speicherung wird $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Form eines Vektors $a \in \mathbb{R}^N$ mit $N = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ abgelegt, d.h. $A_{jk} = a_\ell$ für einen geeigneten Index ℓ, der eindeutig von j und k abhängen muss. Leiten Sie eine Formel für ℓ her (in Abhängigkeit von j und k). Begründen Sie Ihre Formel.

Lösung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Schreiben Sie eine C++ Klasse `TriMatrix` zur Speicherung von unteren Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In der Klasse soll neben der Dimension n auch der (dynamische) Koeffizientenvektor $a \in \mathbb{R}^N$ mit $N = \frac{n(n+1)}{2}$ gespeichert werden. Ferner soll die Klasse über die folgenden Methoden verfügen:

- Destruktor,
- Konstruktor zum Allokieren einer unteren Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Nulleinträgen,
- Kopierkonstruktor,
- Zuweisungsoperator,
- `getDim`-Methode, um die Dimension n auszulesen,
- Zugriff mittels `( , )` auf die Koeffizienten der Matrix, d.h. `A(j,k)` erlaubt es, den Koeffizienten A_{jk} zu lesen und/oder zu schreiben.

Hinweis. An dieser Stelle sollen nur die Signaturen implementiert werden, nicht die Funktionalität der Methoden. Beachten Sie, dass der Zugriff mittels `( , )` auch für `const`-Objekte erlaubt ist, d.h. Sie müssen diese Methode doppelt implementieren!

Aufgabe 5 (3 Punkte). Schreiben Sie den Konstruktor der Klasse `TriMatrix`.

Lösung zu Aufgabe 5.

Aufgabe 6 (1 Punkt). Schreiben Sie den Destruktor der Klasse `TriMatrix`.

Lösung zu Aufgabe 6.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Schreiben Sie den Koeffizientenzugriff der Klasse `TriMatrix` für `const`-Objekte. Stellen Sie mittels `assert` sicher, dass für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Indizes $1 \leq k \leq j \leq n$ erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 7.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Schreiben Sie den Kopierkonstruktor der Klasse `TriMatrix`.

Lösung zu Aufgabe 8.

Aufgabe 9 (1 Punkt). Schreiben Sie die Methode `getDim` der Klasse `TriMatrix`.

Lösung zu Aufgabe 9.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Überladen Sie den `+` Operator so, dass er die Summe $C = A + B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zweier unterer Dreiecksmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechnet. Stellen Sie mittels `assert` sicher, dass A und B dieselbe Dimension haben.
Hinweis. Beachten Sie, dass die Funktion nur Koeffizienten C_{jk} für $1 \leq k \leq j \leq n$ berechnen soll und auch nur auf entsprechende Koeffizienten von A und B zugreifen darf.

Lösung zu Aufgabe 10.

Aufgabe 11 (3 Punkte). Bestimmen Sie den Aufwand Ihrer Funktion aus Aufgabe 10. Falls die Funktion für $n = 10^3$ eine Laufzeit von 3 Sekunden hat, welche Laufzeit erwarten Sie aufgrund des Aufwands für $n = 10^4$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 11.

Aufgabe 12 (3 Punkte). Beweisen Sie mathematisch, dass das Produkt $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zweier unterer Dreiecksmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wieder eine untere Dreiecksmatrix ist, indem Sie die Laufindizes der Summe des allgemeinen Matrizenprodukts

$$C_{j\ell} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{k\ell} \quad \text{für } j, \ell = 1, \ldots, n$$

mithilfe der Dreiecksstruktur von A und B vereinfachen.

Lösung zu Aufgabe 12.

Aufgabe 13 (6 Punkte). Überladen Sie den `*` Operator so, dass er das Produkt $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zweier unterer Dreiecksmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechnet. Stellen Sie mittels `assert` sicher, dass A und B dieselbe Dimension haben.
Hinweis. Beachten Sie, dass die Funktion nur Koeffizienten C_{jk} für $1 \leq k \leq j \leq n$ berechnen soll und auch nur auf entsprechende Koeffizienten von A und B zugreifen darf. Verwenden Sie dazu Ihre Erkenntnisse aus Aufgabe 12.

Lösung zu Aufgabe 13.