

Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 10, für den 6. 6. 2018

40. 1D Poissongleichung mit stückweise konstanten Koeffizienten mit FEM: Wir betrachten nochmal das Problem aus Aufgabe 36/37. Diesmal jedoch mit der Finite Elemente Methode. Leiten Sie die Variationsformulierung her.
Hinweis: Multipliziere Sie mit $v \in H^1((a, c))$, integrieren, wenden partielle Integration auf Teilintervalle an und verwenden die Interfacebedingungen bei b .
41. Stellen Sie für die Variationsformulierung aus Aufgabe 40 das FEM Gleichungssystem für die stw. linearen Hut-Basisfunktionen auf. Bestimmen und plotten Sie die FEM-Lösung u_h für $h = 0.1, \dots, 0.01$.
42. Beweisen Sie die Interpolations - Fehlerabschätzung

$$\int_0^h (u'(x) - (I_h u)'(x))^2 dx \leq ch^2 \int_0^h (u''(x))^2 dx,$$

wobei $I_h : C([0, h]) \rightarrow P^1$ der Interpolationsoperator mit $(I_h u)(0) = u(0)$ und $(I_h u)(h) = u(h)$ ist. Die Konstante c hängt weder von h noch u ab. Sie dürfen $u \in C^2$ annehmen.

43. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= 1 & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 1 \end{aligned}$$

mit der p -FEM.

Wählen Sie dazu den endlich dimensionalen Teilraum

$$V_p := P^p$$

mit der Monombasis $\varphi_i = x^i$ mit $i = 0, \dots, p$. Berechnen und plotten Sie die diskreten Lösungen $u_p(x)$ für $p = 1, 2, 4, 8, 16, 32$.