

Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 11, für den 13. 6. 2018

44. (instationäre Transportgleichung mit FVM) Betrachten Sie die instationäre Transportgleichung in $\Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(b(x)u(x, t)) &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \forall t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x, t) &= u_g(x, t) & \forall x \in \Gamma_{in}, t \in (0, T) \end{aligned}$$

Leiten Sie die Gleichung aus der Massenbilanz her.

$$\text{Massenänderung} = \text{Quelle} - \text{Abfluss über Rand}$$

Die instationäre Transportgleichung in \mathbb{R}^d kann als stationäre Transportgleichung in \mathbb{R}^{d+1} interpretiert werden

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{(x,t)}(\tilde{b}(x, t)u(x, t)) &= f(x, t) & \forall (x, t) \in Q := \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) &= u_g(x, t) & \forall (x, t) \in \Gamma_{in}^Q. \end{aligned}$$

Wie sieht $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{d+1}$ aus? Was ist $\Gamma_{in}^Q \subset \partial Q$?

45. Betrachten Sie auf $\Omega = (0, 1)^2$ die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$-\varepsilon \Delta u + \operatorname{div}(bu) = f \quad \text{in } \Omega$$

mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Es sei $b = (b_x, b_y)$ mit $b_x > 0$, $b_y > 0$, und $\varepsilon > 0$. Die Gleichung wird mit der FDM mit Upwind diskretisiert. Zeigen Sie analog zum Skript die Stabilitätsabschätzung in der max-Norm:

$$\|u_h\|_{l_\infty} \leq \frac{2}{\|b\|_2} \|f_h\|_{l_\infty}$$

Hinweis: Wählen Sie die Vergleichsfunktion $u_h^1(x, y) = b_x x + b_y y$.

46. Es sei $\Omega = (0, 1)^2$. Lösen Sie auf $\Omega \times (0, T)$ die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

mit Randbedingungen $u(x, t) = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T)$ und Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x) = \exp(-20^2((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2))$ und $\partial_t u(x, 0) = v_0 = 0$.

Diskretisieren Sie im Ort mittels FEM, um die ODE $M \frac{d^2 u}{dt^2} + Au = 0$ samt passenden AB zu erhalten. Diese lösen Sie mit dem Newmark Verfahren (vgl Skript Seite 41 mit M anstelle von I). Modifizieren Sie das Python-Skript *parabolic_pde.py* aus dem gitlab um das Verfahren zu implementieren.