Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 12, für den 20. 6. 2018

47. Das Vorwärts - Rückwärts Gauß-Seidel Verfahren ist die Verbindung eines GS - Schrittes mit einem zweiten Schritt in umgekehrter Reihenfolge. Für die aktuelle Nährung $x^k \in \mathbb{R}^n$ wird x^{k+1} wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1/2} &= x_i^k + \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{k+1/2} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}x_j^k\big) \qquad i = 1,\dots n \\ x_i^{k+1} &= x_i^{k+1/2} + \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}x_j^{k+1/2}\big) \qquad i = n,\dots 1 \end{aligned}$$

Stellen Sie diesen Gesamt-Schritt als Richardsoniteration

$$x^{k+1} = x^k + C^{-1}(b - Ax^k)$$

dar. Wie sieht C aus ? Verwenden Sie dazu die Aufspaltung $A = L + D + R$ analog zur Vorlesung. Zeigen Sie dass für symmetrisches A auch C symmetrisch ist.

48. Die Chebyshev Polynome sind definiert als

$$T_m(x) = \begin{cases} \cos(m \arccos(x)) & |x| \le 1, \\ \cosh(m \operatorname{arcosh}(x)) & |x| > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass sie die 3-Term Rekurrenz

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{m+1}(x) &= 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie weiters dass für $|x| \ge 1$ die T_m auch

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^m + (x + \sqrt{x^2-1})^{-m}\right]$$

erfüllen. Plotten Sie $T_1 \dots T_{10}$ auf dem Intervall $[-2, 2]$. (vgl Analysis 1 WS1617, Übsp 23)

49. Zeigen Sie dass für $0 < a < b$ gilt

$$\min_{\substack{p\in\Pi^n \\ p(0)=1}} \max_{\lambda\in[a,b]} |p(\lambda)| \le 2\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)^n,$$

wobei Π^n der Raum der Polynome bis zum Grad n ist. Daraus ergibt sich die Konvergenzratenabschätzung des CG - Verfahrens mit $\sigma(A) \subset [a, b]$.

Hinweis: Wählen Sie als Kandidaten

$$q(x) = \frac{T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}{T_n\left(\frac{-a-b}{b-a}\right)}.$$

Plotten Sie q für $a = 0.05, b = 1, n \in \{5, 10, 20\}$.