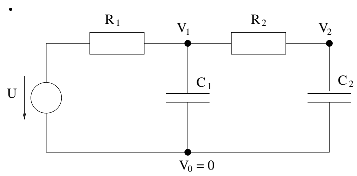
Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 2, für den 21. 3. 2018

4. Zeigen Sie: $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ impliziert $y \in C^3([0,T], \mathbb{R}^n)$.
   Hinweis: Kettenregel, Verwendung der Dgl.

5. Das implizite Eulerverfahren ist definiert durch das i.a. nichtlineare Gleichungssystem
   $$y_{j+1} = y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}).$$
   Formulieren Sie das Newtonverfahren um y_{j+1} zu bestimmen. Implementieren Sie es. Wiederholen Sie Ü3 (Fadenpendel) mit dem impliziten Eulerverfahren.

   Hinweis: `CalcInverse (A, B)` berechnet $B := A^{-1}$

6. Untersuchen Sie die Stabilität vom impliziten Eulerverfahren unter Annahme der einseitigen Lipschitz-Bedingung mit $h\alpha < 1$. Zeigen Sie
   $$\|\Psi^{t_{j+1},t_j}(y_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}(z_j)\|_2 \leq \frac{1}{1-h\alpha}\|y_j - z_j\|_2$$

7. Betrachten Sie das elektrische Netzwerk:
   .
   

   Stellen Sie eine Dgl. für die Potentiale V_1 und V_2 auf. Wählen Sie die Werte $C_1 = C_2 = 0.001$, $R_1 = 1000$, $R_2 = 1$. Weiters sei $V_1(0) = V_2(0) = 0$, und $U(t) = \sin(\omega t)$. Bestimmen Sie die analytische Lösung.
   Hinweis: $V_i = A_i \sin(\omega t) + B_i \cos(\omega t) + C_i e^{-\lambda_1 t} + D_i e^{-\lambda_2 t}$

8. Wenden Sie das implizite und explizite Eulerverfahren auf das Beispiel aus Ü7 an. Setzen Sie $\omega = 1$ bzw. $\omega = 1000$.

   Für welche Schrittweiten erhalten Sie vernünftige Ergebnisse ?

   Ist die Differentialgleichung steif ?