Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 5, für den 25. 4. 2018

19. Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines s-stufigen Runge-Kutta Verfahrens die Darstellung
$$g(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e$$
mit $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^s$ hat.

20. Plotten Sie die Stabilitätsbereiche S folgender Einschrittverfahren (z.B. mit Matlab). Untersuchen Sie graphisch ob $S \cap i\mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge um 0 beinhaltet: Expl/Impl Euler, Verbessertes Euler, Heun, klassisches RK, Gauss2, Gauss-Radau2.

    Was könnne Sie daraus für die Dgl $y' = Ay$ schließen, falls (a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^-$, oder (b) $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$?

21. Zeigen Sie, dass Gauss-Radau Kollokationsverfahren B-stabil und L-stabil sind ! Dabei sind die Kollokationspunkte $c_1, \dots, c_s \in [0, 1]$ mit $c_s = 1$. Die entsprechende Integrationsformel hat Exaktheitsgrad $2s - 2$, d.h.
$$\sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i) = \int_0^1 f(x)dx \qquad \forall f \in P^{2s-2},$$
wobei alle Gewichte b_i positiv sind. Hinweis: Gehen Sie analog zum Beweis für Gauss Kollokationsverfahren vor (Skript Kap 8.10). Da die numerische Integrations jetzt nicht mehr exakt ist, spalten Sie wie folgt auf
$$\int_0^1 q'(\theta) = \int_0^1 q'(\theta) - (Iq')(\theta) + \int_0^1 (Iq')(\theta),$$
wobei der Hermite-Interpolationsoperator $I : C^1 \to P^{2s-2}$ definiert ist als
$$\begin{aligned} (Iv)(c_i) &= v(c_i) \qquad \forall\, i : 1 \le i \le s, \\ (Iv)'(c_i) &= v'(c_i) \qquad \forall\, i : 1 \le i \le s - 1. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $q'(\theta) - (Iq')(\theta)$ auf $[0, 1]$ das passende Vorzeichen hat.

22. *vgl. Aufgabe 4.4 aus Numerische Mathematik II, P. Deuflhard, F. Bornemann*
Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten um das System Erde-Mond lautet in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$ des mitrotierenden Schwerpunktsystems
$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + 2x_2' - \hat{\mu}\frac{x_1 + \mu}{N_1} - \mu\frac{x_1 - \hat{\mu}}{N_2} \\ x_2'' &= x_2 - 2x_1' - \hat{\mu}\frac{x_2}{N_1} - \mu\frac{x_2}{N_2} \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$N_1 = ((x_1+\mu)^2 + x_2^2)^{3/2}, \quad N_2 = ((x_1-\hat{\mu})^2 + x_2^2)^{3/2}$$

und den Daten

$$\mu = 0.012277471, \quad \hat{\mu} = 1-\mu.$$

Dabei ist μ das Verhältnis der Mondmasse zur Masse der Gesamtsystems. Längeneinheit für die euklidische Norm $|x|$ ist die mittlere Entfernung Erde-Mond (ca. 384000 km), Zeiteinheit ein Monat. Die Anfangswerte

$$x_1(0) = 0.994, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = -2.0015851063790825$$

sind so gewählt, dass sich der kleeblattförmige Arenstorf-Orbit ergibt (http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Arenstorf). Die Periode dieses Orbits beträgt

$$T = 17.0652166.$$

Berechnen und plotten Sie die Bahnkurve $x(t)$ (Empfehlung: RK4 Verfahren und automatische Schrittweitensteuerung). Es wird eine Genauigkeit von $x(T)$ von $1km$ gewünscht.