Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 6, für den 2. 5. 2018

23. Sei $H(p,q) = V(q) + T(p)$. Betrachten Sie

$$
\begin{aligned}
p' &= -\frac{\partial H}{\partial q}, && p(0) = p_0 \\
q' &= \frac{\partial H}{\partial p}, && p(0) = q_0.
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen sie dass das symplektische Eulerverfahren

$$
\begin{aligned}
p_{j+1} &= p_j - h\frac{\partial H}{\partial q}(p_{j+1}, q_j) \\
q_{j+1} &= q_j + h\frac{\partial H}{\partial p}(p_{j+1}, q_j)
\end{aligned}
$$

genau Konsistenzordnung 1 hat.

(b) Zeigen Sie dass das Störmer-Verlet-Verfahren

$$
\begin{aligned}
p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j - \frac{h}{2}\frac{\partial H}{\partial q}(p_j, q_j) \\
q_{j+1} &= q_j + h\frac{\partial H}{\partial p}(p_{j+\frac{1}{2}}, q_j) \\
p_{j+1} &= p_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}\frac{\partial H}{\partial q}(p_{j+\frac{1}{2}}, q_{j+1})
\end{aligned}
$$

mindestens Konsistenzordnung 2 hat.

24. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$q'' = f(q), \qquad q(0) = q_0, \quad q'(0) = q_0'.$$

Ersetzt man die 2. Ableitung durch einen Differenzenquotienten so erhält man das Verlet-Verfahren

$$
\begin{aligned}
q_{j+1} &= 2q_j - q_{j-1} + h^2 f(q_j) \\
q_0 &\ \text{ gegeben} \\
q_1 &= q_0 + hq_0' + \frac{h^2}{2} f(q_0).
\end{aligned}
$$

Ein äquivalentes System 1. Ordnung ist

$$
\begin{aligned}
q' &= p && q(0) = q_0 \\
p' &= f(q) && p(0) = q_0'
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie dass das Verlet-Verfahren äquivalent zum Störmer-Verlet-Verfahren

$$
\begin{aligned}
p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j + \frac{h}{2} f(q_j) \\
q_{j+1} &= q_j + h p_{j+\frac{1}{2}} \\
p_{j+1} &= p_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(q_{j+1})
\end{aligned}
$$

ist.

25. (a) Zeigen Sie dass für reguläres $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisches $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrizen

$$
\begin{pmatrix} A & \\ & A^{-\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \begin{pmatrix} I & B \\ & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}
$$

symplektisch sind.

(b) Zeigen Sie dass für symplektische Matrizen $K, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das Produkt KL auch wieder symplektisch ist und für reguläres K die Inverse ebenfalls symplektisch ist.

(c) Zeige Sie dass die Jacobimatrix

$$
\frac{d(p_{j+1}, q_{j+1})}{d(p_j, q_j)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial p_{j+1}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial q_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial q_{j+1}}{\partial q_j} \end{pmatrix}
$$

(siehe Vorlesung) des symplektischen Eulerverfahrens symplektisch ist (und damit auch das Verfahren).

26. Implementieren Sie das symplektische Eulerverfahren und das Störmer-Verlet-Verfahren und testen Sie es für das Fadenpendel ($H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$). Plotten Sie die Energie $H(p_n, q_n)$. Ersetzen Sie die Basisklasse `ODE_Function` durch eine Basisklasse `Hamiltonian`, und stellen Sie zumindest folgende virtuelle Funktionen zur Berechnung von H, $\frac{\partial H}{\partial p}$, und $\frac{\partial H}{\partial q}$ zur Verfügung. Sie dürfen eine separable Hamiltonfunktion annehmen.

```
virtual double Eval (const Vector & p, const Vector & q);
virtual void EvalDp (const Vector & p, const Vector & q, Vector & dHdp);
virtual void EvalDq (const Vector & p, const Vector & q, Vector & dHdq);
```