

## Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 9, für den 23. 5. 2018

36. Modellieren Sie Wärmeleitung auf dem Intervall  $[a, c]$  mit 2 Materialien mit unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten  $k_1$  auf  $[a, b]$  und  $k_2$  auf  $[b, c]$ . Weiters seien Dirichletrandwerte gegeben, nämlich

$$u(x) = u_g(x) \quad x \in \Gamma_D = \{a, c\}.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung für  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 1$ ,  $u_g(a) = 0$ ,  $u_g(c) = 1$ , und  $f = 1$ .

37. Diskretisieren Sie die Differentialgleichung aus 36 mittels finiter Differenzenmethode (FDM) mit konstanter Schrittweite  $h$ . Die dabei entstehende Matrix soll symmetrisch und positiv definit sein. Implementieren Sie das Verfahren und plotten Sie  $u(x)$  und den Wärmefluss  $ku'(x)$ .
38. Beweisen Sie die diskrete Friedrichsungleichung, Lemma 3 aus dem Skript.
39. Verbessern Sie die Konvergenzanalyse der FDM für Neumannrandbedingungen. Wählen Sie dazu die diskreten Normen

$$\|v_h\|_{X_h}^2 = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 + v_n^2 \quad \text{und} \quad \|v_h\|_{Y_h}^2 = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 + h^2 v_n^2.$$

Zeigen Sie:

- Konsistenzfehler:  $\|A_h I_h^X u - I_h^Y A u\|_{Y_h} = \mathcal{O}(h^2)$
- Stabilität:  $\|A_h^{-1}\|_{Y_h \rightarrow X_h} \leq C$

**Hinweis:** Zeigen Sie zuerst  $|v_h(1)| \leq c |v_h|_{H^1, h}$  für  $v_h \in l_2(\bar{\omega})$  mit  $v_h(0) = 0$  und  $\|v_h\|_{X_h} \leq c |v_h|_{H^1, h}$ .