Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 1 zur Vorlesung Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Seien X ein Banachraum und $(u_k) \subset X$ eine Folge mit $u_k \rightharpoonup u$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\|u_k\| \to \|u\|$ und ist X ein Hilbertraum, so folgt $u_k \to u$ für $k \to \infty$.

(ii) Ist $(F_k) \in X'$ mit $F_k \to F$ in X', so folgt $\langle F_k, u_k \rangle \to \langle F, u \rangle$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Seien H ein Hilbertraum und $(u_k) \subset H$ mit $u_k \rightharpoonup u$ $(k \to \infty)$. Zeigen Sie: Es existiert eine Teilfolge (u_{k_j}), so daß der arithmetische Mittelwert

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u_{k_j}$$

für $m \to \infty$ stark gegen u konvergiert.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Seien X, Y und Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. Es existieren $C > 0$ und $0 < \theta < 1$, so daß für alle $u \in X$ gilt:

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Z^{\theta}.$$

Sei ferner $(u_k) \subset X$ beschränkt und $u_k \to u$ in Z für $k \to \infty$. Zeigen Sie: (i) $u_k \to u$ in Y; (ii) wenn $X \hookrightarrow Z$ kompakt ist, dann ist auch $X \hookrightarrow Y$ kompakt.

Korrektur in den Übungen am 09.03.2010.