Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 2 zur Vorlesung
Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer stetiger Operator. Zeige, daß A schwach folgenstetig ist, d.h., es gilt für $k \to \infty$

$$x_k \rightharpoonup x \quad \text{in } X \quad \Rightarrow \quad A(x_k) \rightharpoonup A(x) \quad \text{in } Y.$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\nabla(F \circ u) = F'(u)\nabla u.$$

Aufgabe 6: (2 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$, (u_k) eine Folge mit $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$. Sei (u_k) beschränkt in $L^\infty(\Omega)$ oder $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $f(u_k) \to f(u)$ in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 7: (3 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$. Ferner sei (u_k) eine Folge messbarer Funktionen mit

$$u_k \to u \quad \text{fast überall in } \Omega, \quad g(u_k) \rightharpoonup g(u) \quad \text{schwach in } L^1(\Omega).$$

Zeigen Sie:

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{stark in } L^1(\Omega) \ (k \to \infty).$$

Korrektur in den Übungen am 16.03.2010.