Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 3 zur Vorlesung Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, daß das Randwertproblem

$$-\Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \sqrt{R_0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $R_0 > 0$ genau eine (klassische) positive Lösung besitzt, nämlich $u = \sqrt{R_0}$.

Aufgabe 9:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $L(u) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u)$ ein elliptischer Differentialoperator mit der Matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ und $f(x,u)$ eine Carathéodory-Funktion. Ferner sei $f(x,\cdot)$ lipschitzstetig im Sinne von

$$|f(x,u) - f(x,v)| \le f_0|u - v| \quad \text{für } x \in \Omega,\ u, v \in \mathbb{R},$$

wobei $f_0 > 0$. Zeigen Sie, daß unter einer Kleinheitsannahme an f_0 (die zu bestimmen ist) es höchstens eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$L(u) = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

geben kann.

Aufgabe 10:
Betrachten Sie die quasilineare Gleichung

$$-\operatorname{div}(a(u)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $a \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $a(u) \ge \alpha > 0$ für $u \in \mathbb{R}$ und $f \in L^2(\Omega)$. Definiere den Fixpunktoperator $S : L^2(\Omega) \times [0,1] \to L^2(\Omega)$, $S(v,\sigma) = u$, wobei u die Lösung von

$$-\operatorname{div}(a(v)\nabla u) = \sigma f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

ist. Zeigen Sie, daß die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Leray-Schauder erfüllt sind und schließen Sie die Existenz einer schwachen Lösung der obigen nichtlinearen Gleichung.

Aufgabe 11:
Seien $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine (ggf. nicht streng) monotone Funktion, so daß $f(w) \in L^2(\Omega)$ für alle $w \in L^2(\Omega)$, und $(u_k) \subset L^2(\Omega)$ eine Folge. Es gelte:

$$f(u_k) \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad u_k \to u \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ für } k \to \infty.$$

Zeigen Sie $v = f(u)$ mit Hilfe der Methode von Browder und Minty.

Korrektur in den Übungen am 23.03.2008.

Notenschlüssel: Die Note N für die Übungen setzt sich zusammen aus der Note N_t für die Tafelleistungen und der Note N_a für die Anzahl der angekreuzten Übungsaufgaben gemäß der Formel $N = 75\% \cdot N_t + 25\% \cdot N_a$. Die Note für die Tafelleistungen ist das arithmetische Mittel der einzelnen Tafelleistungen. Die Note für die Anzahl der angekreuzten Aufgaben bestimmt sich anhand folgender Tabelle:

Prozentsatz angekreuzter Aufgaben	<50%	51-60%	61-75%	76-90%	91-100%
Note	5	4	3	2	1