Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 12:
Zeigen Sie, daß es höchstens eine schwache Lösung der Minimalflächengleichung

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

gibt. (Anleitung: Zeigen Sie zuerst für alle p, $q \in \mathbb{R}^n$

$$\Big(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big)\cdot(p-q) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1+|p|^2}+\sqrt{1+|q|^2})\Big|\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\Big|^2.$$

Sind dann u, $v \in H_0^1(\Omega)$ zwei schwache Lösungen der Minimalflächengleichung, zeigen Sie $u = v$ in Ω.)

Aufgabe 13:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $f(0) > 0$ und $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \geq \gamma > 0$ auf $\partial\Omega$. Sei ferner u eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $\gamma_0 > 0$ existiert, so dass $u \geq \gamma_0$ in Ω.

Aufgabe 14:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine monotone Funktion, $b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion mit

$$(b(x,u) - b(x,v))(u-v) \geq \beta(u-v)^2 \quad \text{für } x \in \Omega,\ u, v \in \mathbb{R}$$

und $f \in L^2(\Omega)$. Ferner seien u und v schwache Lösungen der Ungleichungen

$$-\mathrm{div}\, a(\nabla u) + b(x,u) \leq f, \quad -\mathrm{div}\, a(\nabla v) + b(x,v) \geq f \quad \text{in } \Omega$$

und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, daß $u \leq v$ in Ω.

Aufgabe 15:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $f \in L^\infty(\Omega$ und $g \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sei ferner $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\Delta u = e^u - f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und setze $f_* = \inf_\Omega f$ und $f^* = \sup_\Omega f$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\min\{\inf_{\partial\Omega} g, \ln f_*\} \leq u \leq \max\{\sup_{\partial\Omega} g, \ln f^*\} \quad \text{in } \Omega.$$

Korrektur in den Übungen am 20.04.2010.