Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

Übungsblatt 5 zur Vorlesung Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 16:
Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung von

$$\Delta u = u^4 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \le 3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ seien. Zeigen Sie mit Hilfe eines Bootstrapping-Arguments, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 17:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $0 < \beta < 1$ und $f \in L^2(\Omega)$. Definieren Sie den Operator $S : K \to H^1(\Omega)$, $S(v) = u$, wobei $K = \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{H^1(\Omega)} \le M\}$ (M ist in (ii) zu bestimmen) und $u \in H_0^1(\Omega)$ ist die eindeutige Lösung von

$$-\Delta u = |\nabla v|^\beta + f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

(i) Zeigen Sie, daß K konvex und kompakt ist.

(ii) Zeigen Sie, daß eine Konstante $M > 0$, die nur von Ω, β und f abhängt, existiert, so daß $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le M$.

(iii) Zeigen Sie, daß S stetig ist.

Aus (i)-(iii) folgt mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Schauder, daß das Randwertproblem

$$-\Delta u = |\nabla u|^\beta + f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 18:
Seien $z \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$ mit $z \ge 0$ und $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ mit $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$). Zeigen Sie für $0 \le \tau \le T$:

$$\int_0^\tau \langle u_t, (u-z)^+\rangle_{H^{-1}} dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \big((u-z)^+(\tau)^2 - (u-z)^+(0)^2\big)dx + \int_0^\tau \int_\Omega z_t (u-z)^+ dx dt.$$

Aufgabe 19:
Seien $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \ge 1$) ein beschränktes Gebiet und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 \le k \le u_0 \le K$ in Ω. Betrachten Sie das nichtlineare Problem

$$u_t - \Delta u = u^+(\alpha - u) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0,$$

wobei $u^+ = \max\{0, u\}$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie: Es existieren $m \ge 0$ und $M > 0$ mit

$$m \le u \le M \quad \text{in } \Omega,\ t > 0.$$

Korrektur in den Übungen am 27.04.2010.