Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2010

# Übungsblatt 6 zur Vorlesung
# Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

**Aufgabe 20:**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \le 3$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $\varepsilon > 0$, und sei $u$ eine klassische Lösung der Allen-Cahn-Gleichung

$$u_t - \varepsilon\Delta u = -\frac{1}{\varepsilon}(u^2-1)u \quad \text{in } \Omega,\ t>0, \quad \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\ t>0, \quad u(0) = u_0. \qquad (1)$$

Definiere das Funktional

$$E(u(t)) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (u(t)^2-1)^2 dx.$$

Zeigen Sie:

(i) Für alle $t > 0$ gilt $dE/dt \le 0$.

(ii) $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist schwach unterhalbstetig, d.h. $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(\Omega)$ impliziert $E(u) \le \liminf_{k\to\infty} E(u_k)$.

**Aufgabe 21:**
Wir betrachten die Allen-Cahn-Gleichung aus Aufgabe 20 mit $n \le 3$. Zeigen Sie:

(i) Sei $u$ eine schwache Lösung der Allen-Cahn-Gleichung. Falls $-1 \le u_0 \le 1$ in $\Omega$, so folgt $-1 \le u(t) \le 1$ in $\Omega$ für alle $t > 0$.

(ii) Seien $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $T > 0$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von (1). (Hinweis: Sie können folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Aubin verwenden. Die Menge $\{u_k \in L^2(0,T;V) : \partial_t u_k \in L^2(0,T;V')\}$ in $L^2(0,T;B)$ ist kompakt, wenn die Einbettungen $V \hookrightarrow B$ kompakt und $B \hookrightarrow V'$ stetig sind.)

**Aufgabe 22:**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $V = H_0^2(\Omega)$ und $A = \Delta^2$. Zeigen Sie, dass $A$ ein linearer, stetiger und koerziver Operator von $V$ nach $V'$ ist.

**Aufgabe 23:**
Seien $V$ ein reflexiver Banachraum und $A : V \to V'$ ein Operator. Dann gilt:

(i) Wenn $A$ hemistetig und monoton ist, dann ist $A$ vom Typ M.

(ii) Wenn $A$ beschränkt und vom Typ M ist, dann ist $A$ demistetig.

(iii) Wenn $A$ demistetig ist, dann auch hemistetig.

Korrektur in den Übungen am 11.05.2010.